Erstes Kapitel.

Über die Eintheilung.

§. 1.

Die Eintheilung im Allgemeinen besteht darin: daß die zu berechnende Fläche in Trapezen eingetheilt wird, von welchen alle Seiten parallel laufen, und daß entweder die halbe oder die ganze Entfernung zweyer nächster paralleler Linien = 10 ist.

§. 2.

In der Folge wird die Linie, von welcher aus die ||len Linien bestimmt werden, die Höhen- oder Abscissen-Linie genannt, diese selbst aber die Ordinaten heißen, weil es die Natur der Sache mit sich bringt, und der Begriff dieser Benennungen schon an sich zur Erklärung dient.

§. 3.

Die Abscisse wird entweder in der zu berechnenden Fläche oder außer derselben angenommen, je nachdem es der Zweck oder sonstige Umstände erlauben oder gebiethen.

§. 4.

Auf diese Linie trage man die Höhen auf, und zwar, wenn die Figur sehr krummlinigt begrenzt ist, von 10° zu 10°; im Gegentheile aber wähle man die Höhe von 20° zu 20° nach dem hiezu gehörigen Maßstabe. Um aber durch das Auftragen von 10° zu 10° oder 20° zu 20° einen unvermeidlichen Fehler nicht zu erzeugen, so übertrage man früher nach der Größe des Maßstabs auf die Abscissen-Linie 100° oder 200° . . . ., und theile dann erst diese Längen.

§ 5.

Zu der Abscisse AB in Fig. 1 und 2 verzeichne man eine ||le ohngefähr 1/4″ von AB, um viel sicherer das rechtwinklichte Dreyeck an die Punkte, in welchen die Ordinaten errichtet werden, anlegen zu können.

§. 6.

An diese neu verzeichnete Linie lege man ein schweres Linial, in Ermanglung dessen befestige man das leichtere, jedoch so, daß es ohne merklichen Widerstand nicht verrückt werden kann, denn sonst würden bey der kleinsten Verrückung Fehler auf Fehler gehäuft werden.

§. 7.

Die ersten und letzten Ordinaten werden so weit errichtet, daß sie die größten unter allen andern sind, die übrigen werden blos durch die Figur bis an das entgegengesetzte Ende der Grenze gezogen, und zwar von der Absscisse angefangen, wie in Fig. 1 zu ersehen ist. Auf diese zwey größten Ordinaten werden von der Absscisse an 50° — 100° . . . . aufgetragen, je nachdem der Maßstab groß oder klein ist, diese Punkte werden dann durch gerade Linien verbunden; daher sind alle Ordinaten in gleicher Entfernung von der Absscisse, zu der ersten und letzten Ordinate durchschnitten. Wurde aber die Absscisse nicht in der Figur angenommen, so fällt die Verbindung der benannten Punkte hinweg; es muß aber dafür dieses Maß auf jede Ordinate, welche nicht kürzer ist, aufgetragen werden, wie es in Fig. 2 Trapez 1, 2, 3, 4, 5 ... zu ersehen ist.

§. 8.

Da es nicht immer der Fall ist, daß die Ordinaten in die Scheitel der Pollizione treffen, oder daß sie bey krummlinigen Begrenzungen nicht immer solche Stücke abschneiden, welche für eine gerade Linie angesehen werden könnten, oder daß sie wohl gar ihrer Länge nach mit einer winklichten Linie eine Fläche einschließen, so bleibt nichts anderes übrig, als im ersten Falle durch Hülfe geometrischer Lehrsätze Verwandlungen vorzunehmen, daß die Figur mit denen nächsten Ordinaten, nur durch vier Linien begrenzt wird, in den beyden übrigen Fällen, wenn sich keine Verwandlung vornehmen läßt, wende man die Eintheilung mittelst Absscissen und Ordinaten, wie sie im Großen gelehrt worden ist, auch hier im Kleinen an; nur muß ein Absscissentheil oder die Höhe durchaus 10 seyn, die Nothwendigkeit des Gesagten wird gezeigt werden.

§. 9.

Um den Flächeninhalt von abcfea in Fig. 3 zu erfahren, verwandle man abca in adca. Man führe nähmlich zu ac eine ‖le durch b, bis die Ordinate in d durchschnitten wird, verbinde a mit d, so ist abca = adca, daher abcfea = adfea. Es sey nun die Höhe oder ein Absscissen-Theil = A, so ist abcfa = $(ae + df)\frac{A}{2}$ oder $\left(\frac{ae + df}{2}\right)A$.

§. 10.

Um aber den Flächeninhalt von habcfgih in Fig. 4 und von abca zu erfahren, verwandle man abca in adea. Die Verwandlung geschieht, indem man nähmlich cb bis d verlängert, zu ad eine ‖le durch b führt, und die Ordinate hf in e durchschneidet, somit wird abca = adea gemacht, und demnach ist habcfgih = $(ha + ef + ig)\frac{A}{2}$ und abca = ae. $\frac{A}{2}$ oder habcfgih = $(hf + ig - ae)\frac{A}{2}$. Weil A = A ist, so muß auch hf + ig — ae = ha + ef + ig und somit ist die Controlle erreicht. Die Beweise über die Richtigkeit der Verwandlungen in Fig. 3 und 4, sind in allen Lehrbüchern der reinen Geometrie enthalten, und wären daher auf diesem Platze überflüssig.

§. 11.

In Fig. 5 wird Fig. 3 und 4 vereint, daher ist vermög §. 9. acba = ebae, und vermög §. 10 ist acda = afga, folglich auch $(kh + li)\frac{A}{2} - \left((ka + le)\frac{A}{2} + ag\frac{A}{2}\right) = (hg + ie)\frac{A}{2}$ oder = hdcbih.

§. 12.

Wenn eine krumme Begrenzungslinie ihre zwey nächsten Ordinaten durchschneidet, und nicht verwandelt werden kann, wie in Fig. 6, so führe man zur Absscisse eine ||le ab, welche daher auch senkrecht auf die Ordinaten steht, und errichte in den Punkten e d c Ordinaten bis e′ d′ c′, und berechne den Flächeninhalt von a a′ e′ d′ c′ b′ b wie gewöhnlich. Da aber die Entfernung von a bis b = 10° oder auch = 20° ist, und bey geometrischen Aufnahmen der Forste oder Felder zwischen 10° sehr selten solche krumme Linien fallen die mehr als einen Winkel bilden, so ist es erlaubt, Verkürzungen nach dem Augenmaße vorzunehmen, wie es Fig. 7 zeigt. Mit einem sehr großen Maßstab werden nur Kleinigkeiten aufgenommen, und bey diesen kann man schon die Zeit verschwenden. Überdieß geht ja dem Ganzen nichts verloren, denn das + us oder — us erscheint in dem anliegenden speciellen Theil verkehrt nähmlich als — us oder + us.

§. 13.

Oft fügt es sich, daß eine krumme Linie mit einer Ordinate eine Fläche einschließt, wie z. B. in Fig. 8 acgka, oder wenn eine krumme Linie für sich zwischen zwey Ordinaten eine Figur bildet, wie es in Fig. 9 der Fall ist, so trage man in beyden Fällen im ersten auf ak, im zweyten auf sq 10° zu 10° auf, und errichte in diesen Punkten Ordinaten, die bis zur krummen Linie, wie in Fig. 8, oder blos durch die Figur selbst, wie in Fig. 9.

§. 14.

Ist in Fig. 8 as = sr = rq = . . . mk = 10, und sind asb und mkh Dreyecke, so addire man alle Ordinaten zusammen, und multiplizire die Summe mit 10, denn $\frac{as}{2}$ sb $+ \frac{as}{2}$ (sb + rc) $+ \frac{as}{2}$ (rc + qd) $+ \frac{as}{2}$ (qd + pe) + ... $\frac{as}{2}$ (ng + mh) $+ \frac{as}{2}$ mh = der Flächeninhalt von a . . c . . g . . k : a = $\frac{as}{2}$ (sb + sb + rc + rc + qd + qd + pe + ... ng + mh + mh) = $\frac{as}{2}$ (2 sb + 2 rc + 2 qd + ... 2 mh = as (sb + rc + qd . . . . . + mh).

§. 15.

Wäre aber as nicht = sr . . . . . . = mk, oder finge die zu berechnende Figur gleich mit sb, wie in Fig. 8, oder mit pa in Fig. 9 an, oder wäre wohl gar die Figur mit denen zwey Senkrechten oder Ordinaten sb und mh begrenzt, so addire man, um den Flächeninhalt zu erfahren, die halbe Summe dieser Ordinaten zur Summe aller übrigen, und multiplizire die Totalsumme mit der Höhe, die = 10 seyn muß, sind dann an sb und noch an mh Dreyecke, oder andere Figuren, die nicht zur Höhe 10° haben, so berechne man diese eigens, und addire sie zu dem erst erhaltenen Produkte hinzu: so wird es in Fig. 8 z. B heißen $\frac{as}{2} . sb$ $+ sr \left(\frac{sb}{2} + rc + qd + pe + \ldots \frac{mh}{2} \right)$ denn der Flächeninhalt von ab ... d ... hkm ... a $= \frac{as}{2} sb + \frac{sr}{2} (sb + rc) + \frac{sr}{2} (rc + qd) + \ldots + \frac{sr}{2} (ng + mh) + mk . \frac{mh}{2}$, indem sr $=$ rq $= \ldots =$ nm, aber nicht $=$ as und mk ist. Ferner kann man sagen $\frac{as}{2} sb + \frac{mh}{2} mk + \frac{sr}{2} (sb + rc) + \frac{sr}{2} (rc + qd) + \ldots + \frac{sr}{2} (ng + mh) = \frac{sr}{2} (sb + rc + rc \ldots + qd + qd \ldots + ng + ng + mh) + \frac{as}{2} . sb + \frac{mh}{2} . mk = \frac{sr}{2} (sb + 2 rc + 2 qd + \ldots + 2 ng + mh) + \frac{as}{2} sb + \frac{mh}{2} mh = \left(2 \frac{sb}{2} + 2 rc + 2 qd + \ldots + 2 ng + 2 \frac{mh}{2} \right) + \frac{as}{2} . sb + \frac{mh}{2} . mk$

$= sr \left(\frac{sb}{2} + rc + qd + \ldots\ldots + ng + \frac{mh}{2} \right) + \frac{as\ .\ sb + mh\ .\ mk\ .}{2}$ wäre aber mk $= sr$, so würde es heißen $\frac{as\ .\ sb}{2} + rs \left(\frac{sb}{2} + rc + qd + pe \ldots\ldots + mh \right)$. In Fig. 9 z. B. ist die Formel $\left(\frac{pa}{2} + cb + nc + md \ldots\ldots ig \right)$ mit der Höhe. Diese Formeln können auch, zur Controlle, bey der Berechnung der ganzen Figur angewendet werden, welcher Totalinhalt = seyn muß der Summe der Flächeninhalte aller Trapezen.

§. 16.

Da sich in Fig. 10 nicht leicht außer mit gdcg eine Verwandlung vornehmen läßt, so muß man schon die Theile berechnen; ihre Summe muß aber = seyn $(fg + eh)\ \frac{A}{2}$ ($A =$ der Höhe.)