



EXPOSITIONIS
PHILOSOPHIÆ NEWTONIANÆ
LIBER III.

Theoria Gravitatis Analytice De-
monstratur.

CAPUT I.

*Quid de Gravitatis Theoria ante Newtonum
compertum fuerit.*

I  Anta est tum experimentorum, tum
observationum copia, ut amplissimæ
collectioni historiæ naturalis, phæno-
menorumque descriptioni materiam uberem præbere
possit; at Geometriæ, & Mechanicæ principia viam
no-

nobis tandem aperiunt, ut analyfin a phænomenis ad vires, causasque effectrices provehere nobis liceat, quorum ductum si prudente ubique cautione sequamur, de fundamentorum firmitate securi, nihil erit unquam, cur incumbentis iis scientiæ fabricæ metuamus.

Notitia prima, quam Philosophi de rerum natura habebant, plane cum vulgo ipsis communis erat, utpote solo sensuum usu acquisita. At vero cum postea diversas suas cognitiones compararent inter sese, cum in sensus ipsos, quorum ope eas hauserant, accuratius inquirerent, eosque variis juverant adminiculis, quin errores etiam detegerent, in quos incautos inducere possent; cum debitum Geometriæ, Mechanicæque usum in Physicam inveherent, aliam mox Natura faciem apud Philosophorum animos induit, quam quæ rudium oculis obversari videbatur. Telluris superficies putabatur ab initio ultra omnes limites in planum immensum porrigi, reliquis, quæ ad mundi universi compagem pertinent, nubibus, meteoris, luna, sole, stellisque omnibus in cavo quodam versus terram fornicis instar recurvo suspensis. Talem fingebat mundi fabricam primis temporibus a plerisque recepta opiniofallace illa specie, quæ prima subiit, tam alte in animos penetrante, ut & oculis, & auribus sese quam certissime percepisse crederent, quæ neque erant uspiam, neque esse poterant. Hunc in modum Poeta Romanum exercitum, cum in Lusitaniam deductus esset (occiduum scilicet magnæ continentis limitem) exhibet, velut qui audierit ardentem solis glo-

globum, cum sese in stridentis oceani undas immergeret,

Audiit Herculeo stridentem gurgite solem. Lucan.

Hæc dum ad occidentem alii, alii rursus velut eorum narratione acceptum, qui oras illas peragrarint, referebant, immanem alicubi ad ortum patere hiatum, e quo intolerabili cum fremitu sol quotidie sese proriperet. Verum Philosophos haud diu latere potuit, terram nequaquam indefinite protendi, sed figura esse sphaerica præditam; meteora, planetas, stellas non in eadem superficie cava esse constituta, sed in cœlestibus illis spatiis ad diversa, & ingentia alia ab aliis intervalla esse collocata, eorundem magnitudines, motusque veros ab apparentibus discrepare vehementer, de quibus iudicium ferri non possit ex iis, quæ uno tantummodo in loco spectatori obijciuntur, sed combinatis inter se, quæ a diversis ex diverso positu, diversisque e plagis observata sunt, secundum Geometriæ leges licere demum certi aliquid constituere.

2. Et quoniam systema mundanum e figura, mole, motuque vero corporum, quibus constat, deduci debet, pulcherrimo fane exemplo methodus tum analytica, tum synthetica, qua eo pertingere possumus, illustrabitur, ubi ostenderimus, qua demum ratione e phaenomenorum specie, quæ nobis isthic in tellure constitutis offertur, ea, ut in se sunt, cognoscere possimus; quod si nos fugiat, omnis nostra in vires, & causas, e quibus pendent, inquisitione,

M m

tio, vel dubitationi subjacebit, vel errori. Ordinis, motuumque corporum cœlestium notitia, causarum investigationem præcedat, necesse est: illa expeditior multo; hæc plus habet difficultatis; sed illa viam ad hanc sternit, itaque lectoris præparat animum, ut dum methodi vim, quæ una nos ad solidam scientiam perducere potest, in simplicioribus experitur, ad ea dein progrediatur commodius, quorum disquisitio est complicatior. Unde exemplo primum utemur admodum perspicuo, & simplice, paucisque docebimus, ut ex iis, quæ fieri videmus, vera telluris figura, magnitudo, motusque eruantur; & ut hisce principiorum instar semel stabilitis, methodo dein synthetica innumera alia phænomena deducantur.

3. Visui debemus, quæ de partibus systematis nostri Planetarii remotioribus novimus, cum ea tantum, quæ nos prope ambiunt, aliorum sensuum observationi subjici possint. Hinc fit, ut licet pulcherrima sit ea cognitio, suis tamen nævis laboret. Pendet scilicet visio ab imaginum rerum externarum pictura in retina oculi efformata, cui judicium animæ nostræ ex usu & habitudine illico accedit, ita arcte cum ipsa sensatione conjunctum, ut, quamvis sollicita quis mentis reflexione utatur, neutiquam hæc duo separare, vel errorem mox, ut cuperet, corrigere possit. Si visio sola illa imagine in oculo depicta absolveretur, quoties hæc eandem extensionem in retina habet, æqualium magnitudinum ideæ de objectis nascerentur, contingeretque profecto, ut si minusculum quodpiam insectum tam prope objiceretur

retur oculo, ut aspectum diffiti alicujus montis eriperet, parem illi cum hoc molem tribueremus. Verum ex usu longo facultatem contraximus, nostram opinionem, priusque conceptas de distantia notiones, cum amplitudine imaginum, quæ formantur in retina, combinandi, atque id incredibili prorsus promptitudine, ut idea, quæ de rerum mole in nobis consequitur, utrivis ex æquo originem suam debeat, estimatione scilicet illa, quæ de interjecto spatio animo prius infederat, volumini imaginis justam compensationem præstante. Pronum hinc est intelligere, quot erroribus occasionem visus præbere possit: cum enim sæpe in judiciis nostris, quæ de interval-
lis inter diversa corpora ferimus, hallucinemur, fieri necesse est, ut de eorum magnitudine falsas nobis ideas effingamus. Huic adde, quod dum distan-
tias æstimamus, de iis potius ex habitudine quadam, quam ratione, certoque consilio pronunciemus; & experimur non raro, quod, licet postea judicia nostra corrigamus, mentemque ampliore, accuratioreque rerum cognitione instruamus, ejusmodi tamen falsarum notionum vis in nobis perduret. Sic luna non longe ab ortu vel occasu remota, nobis adhuc major apparet, quam dum prope meridianum versatur, quamvis, illic dum est, majore eam a nobis intervallo distare demonstratum habeamus, ut propterea minor videri deberet. Quippe, ut animadvertit Keplerus, cœlum non hemisphærii cavi, sed segmenti minoris speciem refert, ideoque assuevimus majorem illis tribuere molem, quæ ad magnam distantiam prope horizontem videmus, quam quæ eadem quidem apparent magnitudine (seu quorum imagines

in oculo æquales sunt) sed admodum supra horizontem sunt elevata. Atque hinc elegantem explicationem Keplerus repetit, cur lunam majorem arbitremur ad horizontem depressam, quam cum magnam obtinet altitudinem. Licet vero errorem hunc dedocti simus, certumque teneamus, lunæ magnitudinem apparentem horizonti propinquæ eadem ratione decrefcere, qua illius distantia augetur, impetrare tamen a nobis haud possumus, ut rerum harum in ferendo judicio rationem accuratam habeamus, sed veteri consuetudine (a) abrepti, plus, quam oporteat, illi ipsi distantiae excessui tribuimus. Quam vim contracta semel habitudo in animam, ejusque operationes obtineat, quamvis peculiari diligentia a Philosophis examinari mereatur, a loco tamen isto id alienum arbi tramur, ne scilicet citra necessitatem, incerta adhuc, obscuraque cum iis permisceamus, in quorum perspicuitate animus acquiescit. Analysis, quam exponendam suscepimus, nullo eget principio, quod in controversiam vocari possit, sed Geometriæ tantum innititur rite ad systema cœleste applicatæ.

4. Ex-

(a) Quod segmenti minoris, quam hemisphærii, formam cœlum nobis exhibeat, inde fortassis est, quod majora longe intervalla horizontem versus contemplari consueverimus, quam juxta lineam verticalem per zenith transeuntem. Quidquid vero causæ sit apparentis hujus figuræ (modo talis revera appareat) consequi videtur, animum in oppositum, contraria quadam cogitandi habitudine inflecti posse; uti re ipsa sunt nonnulli, qui animadvertunt, lunam ipsis modo haud quam tam magnam apparere, dum prope ab horizonte abest, quam olim, dum juvenes adhuc ejus motus veros nondum perspectos habuerunt.

4. Experientia complura nobis suppeditavit media, quibus de corporum visorum intervallo judicare possumus, modo ne nimium a nobis sint remota; uti inprimis illud est, quod diversa sit oculorum compositio, quando rem vicinam utroque simul intuemur: manifestum namque est, oportere tum alterum versus alterum magis inclinari, ut ad idem punctum dirigantur, quam si res longius a nobis abesset. Pari ratione usu didicimus, corpus plus æquo propinquum si spectemus, imaginem efformari obscuram, & confusam, atque vim quampiam oculo inferri debere, qua ita conformetur, ut nonnihil magis distinctam recipiat. Præterea experimur, vicinarum rerum figuras clarius, illustriusque in oculo depingi; languidius, atque obscurius remotarum. At potissimum metimur intervallum ex rerum aliarum interjectu, vel vero (si res, quam consideramus, ad illarum classem pertineat, quarum notitiam e longiore usu habemus) ex spatii magnitudine, quod ejus imago in retina occupat. Hæc sunt (aut fortassis alia adhuc), e quibus utcunque de corporum non multum diffitorum intervallo judicamus. (a)

M m 3

At

(a) Scriptor quispiam magnæ eruditionis, cujus muneri etiam peculiaris observantia debetur, materiæ hujus pertractandæ initium a sequente observatione facit: „Inter omnes, inquit, ut quidem existimo, convenit, intervallum in se ipso, & sine alterius rei interventu, videri non posse: nam cum id, quod distantiam appellamus, linea tantummodo sit ad oculum usque perducta, in ejus fundo non nisi puncti imaginem habet, quod idem manet, seu lineæ longitudo major, seu minor fuerit”. Distantia, de qua hic agitur, illa est, quam res ab ipso oculo habet, neque isthic

At quando corpora ad ingentia spatia a nobis remota sunt, neque aliud quidpiam interjacet, quod visu percipi posset, uti contingit in corporibus cœlestibus, allata media nos in errorem inducunt, cum tanta intervalla sensuum ope non amplius inter se conferri possint, ideoque nec decerni, quæ ex iis majora, quæ minora, nisi Geometria, simileve artificium, in subsidium vocetur. Hoc igitur dum corpora sunt posita, oculus ea omnia ad eandem superficiem cavam refert. Sic nempe nubes, meteo-
ra, planetæ, stellæ in eodem cœli cavo hæere videntur, quamvis ingens spatii inter singula intercedentis sit varietas. Et tum sane necesse est, ut adimicula indubitata a Geometria petamus, quibus scilicet etiam facile detegimus, nubes non modo planetis nobis viciniore esse, quos nobis quandoque obtegunt; sed etiam paucis passuum millibus elevari, cum haud magna loci, e quo eas spectamus, mutatio earum positiones admodum varias reddat, & quæ in
locis

dicta universe in rerum a sese remotarum intervalla conveniunt. Inter spatia eadem varietas intercedit, quæ in aliis quantitatum generibus reperitur: & magnitudo visibilis partibus constat, & in eas æque resolvi potest, ac quævis alia, quæ tactui substat; nec minus earum, quæ visu tantummodo percipiuntur, proportio exhiberi potest, quam illarum, quæ tactum afficiunt; ut adeo longius, quam par sit, progrediatu auctor, cum asserit, non magis ad Geometriam revocari posse magnitudinem visibilem, quam voces, & dum universe tribuit distantia, quod illi tantum competit, quæ inter rem visui objectam, ipsumque oculum intercedit; atque inde evincere nititur, spatium, extensionem, & rerum intervalla, si proprie loquamur, ad visum non pertinere, & nostra de hisce judicia non magis posse pendere ab oculo, quam ab aure.

locis diffitis eodem tempore ab aliis observantur, diverfum prorsus situm obtineant, ac illæ, quas nos videmus. Porro lunam nubibus multo altiore esse, inde facile intelligimus, quod simul ab omnibus, qui in eodem telluris hemisphærio habitant, cerni possit, atque omnibus inter easdem prope stellas fixas appareat. At enim, quod minus, quam sol, a terra distet, absque negotio discimus, cum soli, nostroque globo interposita eclipsin efficiat; quemadmodum etiam Venerem, & Mercurium, quando in conjunctione inferiore versantur, nobis sole propiores esse inde concludimus, quod tum macularum nigrarum instar in ejus disco quandoque compareant. Quod si instrumenta nostra ad summam perfectionem perducere, observationesque maxima accuracione peragi possent, quantum quodvis e corporibus cœlestibus distet, certo nobis constaret, indeque ordinis, & dispositionis totius systematis mundani cognitionem numeris omnibus absolutam haberemus. Sed quoniam hæc nostræ analyseos præcipua sunt capita, ut pluribus illustrentur, operæ pretium est.

5. Sint in A & C (Tab. III. fig. 50) duo spectatores, aut idem in horum duorum loco altero post alterum; D sit corpus, aut qualecunque demum phænomenon, cujus distantia quæritur. Spectator in A collocatus id in recta ADF; & qui in C est, in altera recta CDE videt, angulusque ab his lineis comprehensus ADC indicat, quantum situs objecti horum spectatorum comparatione mutetur. Quando angulus iste magnus est, intervallam AD non admodum magnam rationem ad spatium AC ha-

Fig. 50.

habet; sed cum exilis est, veluti objecto D in H translato, tum vero necesse est, ut ejus distantia ab A multo major sit, quam AC , qua observator alter ab altero abest; quia scilicet ex Trigonometriæ planæ regulis semper est AC ad AD in eadem ratione, quam habet sinus anguli ADC ad finum anguli ACD . Sic si D nubem quampiam exhibeat, & AC , aliquot passuum millia, angulus ADC sat grandis apprehenditur; e quo conficiamus, nubem illam non admodum magnam habere altitudinem. Si EC , KA sit radiorum solarium inter se parallelorum directio, umbra nubis in locum C plani AC incidit, ideoque in unica statione A captis angulis DAC , KAL ratio AC ad AD investigari potest. Verum etsi AC pluries centena millia passuum contineat, si H lunam repræsentet, angulus AHC prorsus exiguus invenitur: e quo consequitur, distantiam lunæ a tellure multa milliarium millia continere.

6. Esto C (*fig. 51*) centrum telluris; A locus quivis in ejus superficie; CA *e* linea verticalis ejus loci; d objectum, aut quodlibet phænomenon in zenith existens; ADF tangens telluris in A , quæ cum horizonte sensibili ejus loci congruet.

Fig. 51. Quod si objectum d referri ponatur ad stellam fixam in e , quamdiu in verticali existit, eundem situm habebit, seu ex A , seu ex C spectetur. Ast id verum non erit, quando e ad horizontem in D deprimitur. Quamvis enim ponatur (motu proprio nihil interim turbante), centrum C , objectum D , stellamque E semper in eadem recta manere; neque-

queunt tamen D , & E in eadem recta persistere cum loco spectatoris A ; sed dum D ab observatore versus F refertur, stella adhuc supra horizontem arcu EF elevata videbitur, qui angulum EDF , seu ADC metitur, cujus sinus est ad radium, ut semidiameter terræ CA ad distantiam objecti a centro CD . Atque hic angulus parallaxis horizontalis objecti, vel phænomeni appellatur, estque illi æqualis, sub quo e distantia CD semidiameter telluris appareret, idemque prorsus est, objecti cujuscumque parallaxin horizontalem reperire, ac magnitudinem, seu minutorum aut secundorum numerum definire, quæ e loco objecti semidiameter terræ spectata subtenderet. Sint objecta quotvis in recta AF , velut D , G , H ; fingamus in singulis suum adesse observatorem, qui inde semidiametrum terræ AC metiatur: apparebit ea sub angulis CDA , CGA , CHA , qui propterea erunt objectorum illorum parallaxes, eadem ratione decrecentes, qua singulorum a tellure distantia majores fiunt.

Unde evidens fit, objectorum istorum distantias reperiri, si magnitudo apparens semidiametri telluris ex iis spectatæ inveniatur: methodi certe principia nullam patiuntur exceptionem, quando clarum est, ut tellus magna appareat, requiri, ut spectator ab ea non multum distet; & ex opposito, e majoribus eam intervallis considerari debere, ut minor videatur. Qui non nisi aliquoties centenis passuum millibus abesset, tellurem magna adhuc sibi mole apparentem haberet; at in lunam usque translato observatori, terræ semidiameter sub angulo uno gradu

minore spectandam se præberet. **E** Venere ejusdem prope magnitudinis hic globus noster cerneretur, cujus planeta ille in tellure videtur. Quod si ad Jovem vel Saturnum spectatorem removeamus, ejus visui ut terra nostra sese fere penitus subducatur, est necesse, nisi vel majore longe, ac nos, oculorum acie polleat, vel artis instrumenta in subsidium vocet. Et quoniam data semel ratione distantiae observatoris a centro terræ ad ejusdem semidiametrum, facile determinatur, quantæ molis ei apparere debeat, consequens est, ut e contrario, data magnitudine, quam tellus ejus aspectui objicit, distantia eadem facilitate reperiatur.

7. Atque hunc in modum telluris mensura in cœlum ipsum infertur, corporumque planetariorum distantiae tam cum semidiametris terrestribus, quam inter se comparantur. **M**ateriae huic si plus adhuc lucis attulerimus, e re fane erit, quippe quæ tanti ponderis est in Astronomia, scientia, inquam, illa, cui cognitionem tam amplam, tamque late diffusam pulcherrimarum rerum debemus. **F**ingamus spectatorem in **A** constitutum, cujus visui immensum undique spatium objicitur, dum interim recta **DL**, ad **AD** perpendicularis, & semidiametro telluris æqualis, a minima distantia longius semper ultra omnem terminum in recta **AF** progreditur. Hoc posito, in comperto est, parallaxin cuivis intervallo competentem nil aliud esse, quam angulum, sub quo ab observatore in **A** semidiameter terræ, sive recta mobilis **DL**, cum illuc pervenit, videretur; nempe distantis **AD**, **AG**, **AH** &c respon-

spondentes parallaxes sunt anguli DAL , GAM , HAN , apparentem semidiametri terræ magnitudinem metientes, quam spectatori in A ex iis intervallis exhiberet. Si cogitemus, hanc semidiametrum ultra quosvis limites longius semper removeri, ita fere imminutæ speciem præbebit, uti distantia augetur. Hinc porro parallaxes eadem decrescent ratione, earumque diminutio iisdem exponetur gradibus.

Nemo non videt, ut primum objectum quodpiam a linea verticali discefferit, ita spectatori in A constituto horizonti vicinius, quam vere sit, appariturum, eoque fore majorem hanc depressionem, quo reapse propius ab eo circulo abfuerit. Verus objecti D locus in E est, quo nempe e centro C spectatum referretur; apparens autem, si ex A consideretur, est F , ejusque depressio, seu parallaxis, mensuram habet arcum EF , aut angulum EDF , parem angulo ADC . Ut autem hæc justa major vicinia cum horizonte inveniatur, observanda est stella fixa E , quæ parallaxi omni a nobis percipienda caret, & quacum objectum illud in linea verticali AD constitutum in conjunctione ponebatur: nam ipsum depressionis discrimen objecti D ex A visi infra fixam E parallaxin exhibet. Simili methodo ex Astronomicis observationibus lunæ a centro telluris distantia media eruta est fere 60 semidiametrorum nostri globi.

8. Si corpus e majore aliquo intervallo contueamur, longe accuratius de ejus figura pronunciare possumus, quam si e propinquo illud spectemus. Nam diffiti major multo pars uni, eidemque obtu-

tui subjicitur, ut proinde multo commodius totius figura cognosci possit, quam si oculo prope admoto minuscule quævis asperitates pateant, quæ cum visum potentius afficiunt, facile in errorem nos conjiciunt, dum de voluminis integri forma judicare debemus. Hinc est, ut exemplo rem declaremus, quod absque difficultate solem & lunam figura globosa esse cognoscamus, cum quacunque positione oculis objecta circulari semper ambitu definiantur, quod quidem solis corporibus sphericis convenit. At non ita expeditum nobis est, quæ tellus figura sit, constituere, quod amplissima etiam spatia, ad quæ visus noster ex altissimorum montium cacumine pertingit, admodum exigua superficiei totius sint portio, quæ lente nimium in spheram curvatur, quam ut a nobis percipi possit. Attamen suppetunt nobis argumenta alia gravissima, quæ terram rotundam esse evincunt, quamvis a spherica forma non nihil aberraret. Telluris sectiones, quas per polos transire mente concipimus, seu meridianas, circulares esse inde nobis constat, quod, quo quis magis versus meridiem accedit, eo illi semper stellæ septentrionales magis versus horizontem deprimi, australes vero supra eundem elevari videantur, atque id constante fere ratione, ut tum illarum descensus, tum ascensus harum ad unum gradum, 60 miliaribus Italicis, seu Geographicis in meridiano respondeat. E quo concludimus, sectionem per meridianum transeuntem esse circulum, cujus unus gradus 60 miliaria, tota autem circumferentia 60×360 , vel 21600 contineat. Qui in æquatore sunt, illis polus uterque in ipso horizonte videtur; ast inde versus boream pro-

progredientibus polus cognominis attollitur, donec in ipso polo telluris constitutis, polus cœlestis in puncto verticali, seu zenith, appareat, ut universe poli elevatio totidem semper gradibus crescat, quot distantia ab æquatore. Porro æquatorem, sectionesque huic parallelas, ex ordinatissimo lucis ab oriente versus occidentem progressu, quem singulis diebus experimur, deducimus. Sol eo citius ad loci cujuscvis meridianum appellit, quo ab altero magis versus ortum situs est, temporis intervallo ipsi meridianorum distantiae (cujus mensura in æquatore sumenda est) respondente. Quin telluris figura globosa ex libellatione quoque deducitur, in qua ratio utique haberi debet discriminis, quod inter lineam libellæ veram, & apparentem intercedit, cum illa sita sit in ipsa superficie convexa, infra planum tangens semper depressa, hæc vero in plano terram tangente.

9. Verum quod terram sphaerica forma esse planissime æque, ac certissime ostendit, est ejus umbra, quæ in eclipsibus lunæ in hujus discum cadit. Quoniam enim hæc umbra semper arcu circulari circumscribitur, necesse est, ut terra, a qua projicitur, sphaeræ figuram habeat, quæ siquidem alicubi vel angulosa esset, vel majorem in modum promineret, id certe aliquando ejus umbra proderet. Equidem montium juga terræ superficiem inæqualem reddunt; sed enim cum tota ejus mole composita adeo sunt exigua, ut nullo modo in umbra percipi possint. Sic etiam terra a littoribus maris versus majorum continentium interiora paullatim assurgit, ut in Europa ab oceano, a mediterraneo, a ponto Euxino

versus Helvetiam; at enim lenior hic ascensus tam modicus est, ut nullam admodum figuræ mutationem adferre possit: major si foret, continentis medium nimium in atmosphæram attolleretur; nunc vero fluminum cursui sufficit, & admirabilem illum aquarum in orbem refluentium motum, globo nostro tam necessarium, conservat; neque est, cur dubitemus majores terrarum tractus propterea in acclive protendi, ut inde id commodi enasceretur. Denique omnia hæc, quæ adhuc differuimus, quam evidentissime globosam nobis figuram telluris commonstrant, quamvis accurate sphærica non sit; quæ siquidem e majore intervallo spectaretur, non aliter, quam sol, vel luna appareret, id est, limbo circulari, modo ne ultra modum esset remota, ut contracta admodum diametro tota ejus superficies in punctum exiguum, Veneris, vel Martis instar, abiret, nec altissimorum Peruvianorum montium catena sufficiens lumen reflectente, quo percipi posset. Ad spatia tam ingentia spectatoris oculum, nisi telescopio, similive instrumento adjutum, figura penitus effugeret.

10. Oceanus, quo magna telluris portio tegitur, accuratius superficiem sphæricam induit, quam partes solidæ; neque dubium est, quin id e graviatæ, qua omnia corpora versus tellurem, directione ad ejus superficiem perpendiculari agente, tendunt, proficiscatur. Quod si enim gravia sub angulo aliquo acuto versus superficiem niterentur, ea ex parte aquæ defluere deberent, neque antea æquilibrarentur, quam directio iis undique ad perpendicularum

culum infisteret, neque ullam in partem moveri possent. Porro lineæ superficiei sphaericæ normales omnes in ejus centro concurrunt; quare cum tellus parum a sphaerica figura abeat, directio gravitatis proxime versus centrum tendit; non quod puncto illi, quod centrum dicimus, vis quæpiam insit peculiaris, vel corpora, nescio, qua ducta illecebra illuc connitantur; sed quod directio hæc e partium omnium versus omnes, quibus terra constat, gravitatione mutua oriatur, quemadmodum in sequentibus clarius patebit. Corpora gravia directionem nullam ex se certam, atque definitam sequuntur, in quam opinionem vulgi animus proclivis est, neque fulcris ullis, aut fundamentis opus est, quibus moles hæc terrestris incumbat, quando eo jam corpora deorsum tendunt, quod versus centrum ferantur, aut ut accuratius loquamur, quando linea ad superficiem sphaericam perpendicularis, si inde a parte concava producat, non nisi deorsum dirigi possit, & in oppositum tantummodo, seu a parte convexa, sursum. Si globus noster non nisi fluidis constaret, ejus superficies undique maxime æquabilis foret, neque pars ulla supra alias emeretur, sed omnes toto voluminis ambitu æqualibus momentis libratae extra lapsus ullius periculum sustentarentur. Hunc in modum facile animo comprehenditur, quomodo antipodes adversis nobis vestigiis consistent; neque minus foret absurdum, si quis existimaret, corpora in opposito hemisphaerio a terra suo pondere avelli, alioque decidere posse, quam si isthic nobis persuaderemus, futurum aliquando, ut nostratia sua sponte sursum in aera efferantur.

II. Gravitatis vis ad universa corpora tellurem ambientia pertinet. Postquam aeris ipsius pondus rationibus omnem dubitationem excludentibus demonstratum est, maxime Galilei, & Torricellii experimentis jam in vulgus quoque notis, aliisque consimilibus, perspicuum est, quævis demum corpora terrestria, cujuscunque sint generis, gravitatem in tellurem exerere; quæ vero quibusdam inesse apparet levitas, eam provenire ab aeris circumfusi gravitate majore, a quo scilicet non secus in altum attolluntur, ac suber ab aqua, plumbum a mercurio; aut certe eorum ascensus medio cuiuspiam intra eorundem particulas contento adscribendus est. Imprimis autem gravitatem omnibus corporibus terrestribus communem esse, ex eo intelligimus, quod captis maxima accuratione experimentis semper constiterit, eam ex materiæ proportionem agere, neque a figura, neque a volumine, neque a partium plexu pendere, sed solius massæ modum sequi, indeque mensuram accipere, si nempe medii, cui innatant corpora, interim in ea actionem semoveamus. Efficat enim gravitas æquali tempore æqualem in corporibus quibuscumque libet velocitatem, ut propterea necesse sit, eam in æquales partes eodem prorsus modo agere, & in majores majorem quoque vim exerere. Directio porro illius fere ad centrum telluris tendit, cum in præfens rationem non habeamus discriminis, quod figura a sphaerica paullum diversa, atque per motum uniformem circa axem telluri inducta, adfert: efficacitas item tanta in corpora est, ut omnia intra minutum secundum temporis 15 $\frac{1}{12}$ pedes Parisinos deorsum ferrentur (quemadmodum e compluribus sum-

ma diligentia institutis experimentis eruitur) si quidem recta ad horizontem perpendiculari citra ullum impedimentum laberentur, neque aeris, alteriusve medi ambientis resistentia motus infringeretur.

Dum corpus directione ad horizontem obliqua projicitur, curvæ alicujus portionem ita percurrit, ut accurate in illud terræ punctum recadat, cui recta imminet tantæ altitudinis punctum alterum in linea directionis, ut inde lapsu perpendiculari & libero, eodem tempore ad idem descensurum fuisset: atque id, si fingamus gravitatem directionibus parallelis agere, uti ante Newtonum plerumque hæc hypothesi locum habebat, & vero etiamnum habet citra errandi periculum, quantum ad motus quoslibet, qui per machinas nobis usitatas effici possunt; licet ceterum Newtonus necessarium duxerit, ut major ratio modi, quo gravitas agit, haberetur.

12. Postquam analysin eo jam deduximus, ut figura telluris, gravitatisque directio nobis innotesceret, ingens inde phænomenorum varietas methodo synthetica contextam explicationem recipit; uti ea cumprimis universa, quæ ex doctrina de sphæra petuntur, seu quis Pythagoræum, seu Ptolomaicum mundi systema amplecti malit, e telluris forma sphærica deducuntur. Quoniam sol 24 horarum tempore totum circulum percurrere videtur, 15 gradus horæ spatio, ac gradum unum intra quatuor temporis minuta conficit; atque id tam in æquatore, cum in eo versatur, quam in parallelis, quos dietim peragrat, locum habet. Hinc si meridianorum distantia in æquatore accepta duorum quorumvis locorum

nota sit, facili reperitur calculo, quantum horæ alterius præcedant horas, quæ in altero numerantur, modo cuius distantiae gradui quatuor minuta horaria tribuantur; & ex opposito data temporis differentia, quod in locis diversis computatur, longitudinis discrimen obtinetur, si quatuor temporis minuta intelligantur gradui respondere, itaque ex proportionem minorum partium valor æstimetur. Quivis facile perspicit, horas, quæ peculiari quovis in loco singulæ post singulas fluunt, omnes simul, eodemque haberi tempore, si quis totum terræ globum spectet, ut nullam ex omnibus viginti quatuor quis designet unquam, quin illico ostendatur aliquis in telluris ambitu meridianus, sub quo positi incolæ eam ipsam horam tunc numerent. Horizon *sensibilis*, seu, ut ajunt, *physicus* loci cujuscumque est planum, cui linea verticalis ad perpendicularum insistit, quod propterea telluris superficiem contingit tantummodo; at *rationalis* est planum priori parallelum, perque centrum terræ transit, cujus poli sunt puncta Zenith & Nadir, quemadmodum æquator eosdem habet, quos Borealem, & Australem mundi dicimus. Jam vero quæ loco cuius propria sunt phænomena, ex horizontis positione cum circulis motus diurni apparentis solis, stellarumque comparati originem ducunt. Horizon eorum, qui in æquatore sunt positi, per mundi polos transit, atque æquatorem, omnesque parallelus bifariam secant, quam ob causam iis in locis dies noctibus semper æquales sunt, omniaque astra medio revolutionis suæ diurnæ tempore supra horizontem elevata sunt, medio infra eundem depressa; præterea circuli omnes, in quibus

bus motus diurnus siderum peragi videtur, horizonti sunt perpendiculares, atque ideo æquatoris incolæ dicuntur sphæram rectam habere; quibus illud etiam peculiare, quod, dum sol in æquatore est, ad horizontem ortivo recta ad Zenith usque ascendat, inde iterum versus occasum via ad horizontem perpendiculari devolvatur; alias vero, quando extra eum circulum versatur, oriatur quidem sub angulo ab horizonte recto, sed mox obliquo, seu in Austrum, seu in Boream cursu, ut anni fert tempestas, parallelum suum peragret: e quo illud quoque emolumenti enascitur, quod non parum calor immodicus mitigetur. Ad polos constitutis horizon cum æquatore congruit, ut hemisphærium cœli boreale semper conspicuum sit e cognomine polo telluris, supra cujus nempe horizontem perpetuo extat; at vero ex australi nihil omnino videri possit, semper infra horizontem latente. Et quia circuli motus diurni cum æquatore, & proinde cum horizonte paralleli sunt, sol, stellæque omnes parallele ad horizontem revolvi videntur: stellarum fixarum nullus est unquam ortus, nullus occasus; solis annuus, cum nempe verno æquinoctio in hemisphærium illud ingreditur, idemque sub æquinoctium autumnii relinquit: ex quo fit, ut die fruantur spatio semestri, parique iterum intervallo careant. Atque hic situs quibus obtingit, sphæram parallelam habitare dicuntur.

In locis, quæ polum inter, & æquatorem sunt, diurni circuli oblique ad horizontem inclinantur, supra quem polorum alter semper eminent arcu loci cuiusvis

tudini æquali, altero tantundem infra eum constituto. Sidera, quorum distantia a polo superiore latitudinem loci non excedit, nunquam occumbere possunt, uti nec illa oriri, quæ pari intervallo a polo opposito sunt remota. Et cum æquator, & horizon sese in partes æquales secent, quod in circulis maximis fieri necesse est, ubivis terrarum nox diei æquatur, quando sol æquatorem percurrit; at enim dum ex eadem parte cum polo conspicuo est, parallelorum diurnorum major portio supra horizontem extat, quam infra eum lateat, &, quod consequitur, dies sunt noctibus longiores. Contraria ratione sole in alteram ab æquatore partem transgresso, cum illic paralleli cujusvis pars major sit sub horizonte, & minor tantum visui exposita, dies a noctibus excedi debent. Harum omnium regionum incolæ sphaeram obliquam sortiti sunt. Quod si jam anni totius curriculum spectemus, in locis hisce tam variis æquali tempore dies habetur, seu solis centrum supra horizontem aspectabile est, æquali nox, seu solis centrum infra horizontem absconditur; si interim a lucis refractione, & figura elliptica orbitæ telluris cogitationem abstrahamus, quarum rerum in sphaericis ratio nulla habetur. At vero æqualia hæc noctis, lucisque tempora dispari prorsus ratione singulis obtingunt locis. Sub æquatore duodecim diurnis totidem nocturnæ horæ inviolate succedunt. Sub polis, quidquid diei est, simul, nullaue nocte interruptum habetur, uti etiam nocturnum tempus continuum est, utrivis anno dimidio respondente. In locis medii inter polos, & æquatorem situs, quod alia anni tempestate ultra æquum diebus magis producti obti-

obtigit, id alia noctibus tribuitur. Demum circulo-
rum polarium accolis, pluribus diebus, aut etiam
hebdomadibus continuis sol supra horizontem in cir-
culum revolvitur; ast anni tempestate opposita æque diu
infra illum moratur. Ut adeo etiam illic æqualitas
diurni, nocturnique temporis observetur, modo ne-
que magnitudo diametri solis, neque luminis refra-
ctio, neque crepuscula, neque orbitæ telluris forma
elliptica in computum veniant, quibus omnibus nem-
pe efficitur, ut tempus diurnum magnam partem
e nocturno detrahat, idque imprimis in hemisphæ-
rio boreali.

Amplitudinis præterea ortivæ & occiduae, seu
arcus horizonis, in quo sol diversis anni tempori-
bus oritur, & occumbit, multiplex est discrimen,
quod ex iisdem principiis proficiscitur. Nam mini-
ma est sub æquatore, neque ultra $23^{\circ} 29'$ utrinque
in meridiem, & septentrionem ab ortus & occasus
cardinibus excurrit. In latitudine 56° fere ad 45°
ab iisdem punctis in utramque partem discedit, ut
proinde loca ortus & occasus ad austrum remotissima
distent a septentrionalibus fere circuli quadrante. Sub
circulis polaribus amplitudo hæc medium horizontem
a septentrione usque ad meridiem occupat.

Circulum qui horizonti simul, & meridiano ad
angulos rectos infistit, verticalem primum appellant, &
quia, admaximos sphæræ circulos pertinet, horizontem
bifariam dividit, omniaque loca, per quæ transit, no-
bis ad verum ortum, & occasum sita sunt: qua e re
multa repetenda sunt in Geographia, quæ paradoxii
speciem præbent.

Ex iisdem porro fontibus universæ Gnomica ratio derivatur. Horologiorum solarium simplicissimum est æquinoctiale, in quo umbra in planum parallelum ad circulos diurnos solis projicitur a stylo, seu indice ad idem planum perpendiculari, & quia sol temporibus æqualibus æquales arcus in suo parallelo percurrit, etiam umbra in isto horologiorum genere motum uniformem habet, ut proinde intervalla horarum paria esse debeant, quod obtinetur, toto circuli ambitu in 24 partes æquales diviso. Reliquorum constructio e modo dictis haud difficulter intelligitur; verum præsentis operis institutum hæc tantummodo ut in transitu perstringamus, admittit, dum interim luculentum habemus exemplum, qua venustate, quo polleat illico veritas, si animum advertamus, quam stupenda phænomenorum varietas e principiis tam paucis profluens (uti sunt figura telluris, ejusque motus diurnus cum axis inclinatione) sese nobis offerat, dum omnem terræ ambitum inde a zona torrida ad glaciales usque, vel inde ab æquatore ad polos mente perlustramus, ibique caloris & frigoris, dierum, noctiumque discrimina, siderum apparentes motus attendimus. Tam multiplex rerum species e duobus modo principiis adeo simplicibus deducta, non solum menti utilissimarum meditationum campum aperit amplissimum, sed etiam amænissima quadam imagine recreat, velut ipsis oculis hæc omnia subjecta haberemus, ut inde naturæ suis in effectis fecunditatem agnoscamus. Et vero ea, quæ in globo nostro ab æquatore ad polos usque tam inter se diversa deprehendimus, velut in tabula quapiam immensa illam varietatem nobis depin-

pingunt, quam in systemate toto solari ubivis obtinere arbitrari licet, a Mercurio inde, planetarum soli proximo, atque calidissimo, ad extremum usque Saturnum, qui de luce, caloreque participat minimum.

13. Quamquam ea, quæ ad doctrinam pertinent de sphaera, non tantum in systemate Copernicano, seu Pythagorico, sed etiam in Ptolomaico exponi possint, si in hoc fingamus, motu *Primi Mobilis* totum universum affici (sola terra, & quæ eam attingunt, demptis) & singulis diebus circa axem telluris gyron; nihilominus hæc hypothesis posterior adeo cuilibet, qui iudicio est integro, neque rationem sensuum arbitrio submisit, aut quæ natura offert, in religionem vertit, a vero aliena videtur, ut a plerisque rejiciatur. Cometarum motus per spatia illa cœlestia liberrime excurrentium ostendunt sane, haud alibi, quam in cerebro, orbis illos solidos effingi posse, neque ullum haberi aut motorem communem, quo universi moles secundum eos abripiatur, aut axem, circa quem vastissima hæc machina agatur. Dein vero portentosa illa velocitas, quam stellis fixis ab iis attribui necesse est, qui huic doctrinæ se addixerunt, cui non sit offensionem, qui, ad quam immania spatia universi compages porrigatur, ex æquo arbitrari possit? Telluri porro tantum honoris immeriti deferre, ab æquitate Philosophi abhorret plurimum, idque maxime, dum nobis perspectum est, corpora cœlestia pleraque, ipsumque adeo solem, circa axes suos revolvi. Intempestivum hoc excellentiæ studium efficeret profecto, ut siquidem in
alium

alium quempiam e cœlestibus globis transferremur, illum ad eundem mox dignitatis gradum eveheremus, in quo nunc tellurem nostram positam arbitramur, atque in eo universi centrum collocaremus. Præter hæc, & complura alia, quæ in rem præsentem afferri possent; pendulorum sub æquatore motus tardior, graduumque meridiani, si inde versus polum progrediamur, continuum augmentum, manifesto sunt indicio, dari quempiam nisum in corporibus abeundi a centro, seu vim centrifugam, quæ cum maxima sit sub æquatore, minuitur paullatim, dum sub polis expiret penitus, quod motum telluris circa axem suum extra omnem dubitationem ponit. Quare dum de corporibus cœlestibus agemus, motum diurnum, & apparentem intactum relinquemus, velut qui in tellure tantummodo locum habet: ut proinde analysi nostra, quæ ad causarum motus in cœlestibus globis efficientium cognitionem nos perducet, rebus ipsis, non vero fallaci illi speciei, quam objiciunt oculis, innitatur.

14. Eorum, quæ de sphæricis attulimus, rationes in veris motibus contineri, facile ostenditur. Globi terrestris dimidium semper a sole collustratur, dimidium lucē caret, quam circulus maximus ab umbra determinat. In loco quovis tum dies est, cum in parte illuminata versatur; nox vero, dum in altera a sole averſa revolvitur. Motus diurnus circa axem ab ortu in

in occasum fit, videturque sol tunc supra loci alicujus horizontem attolli, quando locus is ad lucis, & umbræ communem terminum ex parte occidentis advenit; occumbere vero, cum locus eundem circulum ad orientem attingit. Puncto, in quo superficiei telluris occurrit recta centra solis & terræ jungens, sol verticalis est, congruitque id cum medio, sive polo disci illuminati. Orbita annua, quam motu vero tellus, & apparente sol percurrit, est ecliptica; & quia axis terræ hujus plano oblique insistit, æquatorem secat (sub angulo nempe $23^{\circ} 29'$ fere), vocanturque puncta intersectionum *æquinoctialia*, in quibus, dum sol e terra conspicitur, recta centra utriusque globi connectens cum axe telluris angulum rectum constituit. Puncta *solstitialia* dicuntur, quæ ab illis prioribus 90° distant, ad quæ sol pervenit, quando maximam versus polos declinationem acquirit. Cum æquator; utpote circulus maximus, ab eo, qui umbræ ac lucis est terminus, secetur bifariam, consequitur, dies; noctesque sub æquatore æquales esse. Porro clarum est, sole nobis in cœli regione boreali apparente, polum septentrionalem telluris semper in hemisphærio illuminato versari, ut proinde dies illic sit a verno ad autumnale usque æquinoctium continuus, quo nempe nox succedit usque ad veris reditum producenda. Oppositum continget polo telluris australi. Locus ex eadem parte æquatoris situs, in qua ille est, cujus vertici sol imminet, majorem sui circuli ad æquatorem paralleli portionem in hemisphærio illumi-

nato revolutione diurna conficere debet, quam fit altera in hemisphærio obscuro percurrenda; unde dies noctem excedat, oportet; at vero, quando ex parte æquatoris altera est locus, contrarium prorsus eveniet, & nox die erit longior. Hunc in modum cetera phænomena, quæ ad sphærica revocantur, ex motibus veris derivantur, qui in hoc mundi systemate fiunt.

15. Atque hæc sunt, quibus breviter exponere visum est, quæ de gravitate corporum terrestrium ante Newtonum Philosophis comperta erant. Et quemadmodum figuram telluris huic uni causæ adscribere debemus, ita observante rectissime Copernico (a), proclive sane est, si rationem sequamur, ut existimemus, simili quapiam vi in sole, ceterisque planetis effici, ut figura eorum in motibus tam variis conservetur. Complures a diversis pertentatæ sunt viæ, variaque excogitata systemata, quibus principii hujus rationes, causasque explicatas darent, verum eventu semper sinistro. Cartesius per vim centrifugam materiæ suæ subtilis, circa axem terræ perpetuo gyrantis, nodum hunc dissolvere conatus est; verum jam alias hanc explicationem refecimus (b). Alii magnetismi quandam speciem in subsidium vocarunt: at magneticarum, gravitatisque virium discrimen etiam in iis, quæ ad rei summam faciunt plurimum, sese ingens prodit. Alii rursus ad atmosphæræ pressionem confugerunt, licet tantum ab-

(a) Lib. I Cap. 4 §. 4.

(b) Lib. I Cap. 3 §. 2.

ablit, ut aer gravitatem in reliquis corporibus efficere possit, ut etiam eorum pondus semper immineat. Verum quod ex his omnibus recte demum conficitur, illud est, hanc vim pertinere ad corpora omnia (quæ quidem percipi possint) in telluris superficie, aut prope posita, in qua vi hæc duo sint palmaria; primum, quod materiæ in corporibus contentæ modum omnino sequatur; alterum, quod nunquam interrupta, & æquali actione tum quiescentia, tum in motu constituta corpora afficiat: quorum postremum inde constitit, quod in corporibus cadentibus æquali tempore æqualia fiant velocitatis incrementa. Hoc duplici charactere a causis mere mechanicis discernitur, quarum efficacia a corporum superficie, aut volumine mensuram accipit, & quæ semper minus celeritatis conferre possunt iis, quæ jam motum conceperunt eadem directione, qua ipsæ agunt, quam eodem tempore in quiescentibus efficerent. Sed dum hæc de gravitate, illud non agimus, ut de causa quidquam decernamus, sed viam tantummodo ad ea sternimus, quæ ex principii tam late per omnia corpora diffusi natura consequuntur.



CAPUT II.

*Luna est corpus grave, non secus versus
telluris centrum nitens, ac corpora
terrestria.*

I. **C**UM Newtonus perpenderet, quid quid
corporum seu in telluris superficie, seu
prope eam esset, a gravitate æqualiter af-
fici, neque ejus vim, quantum quidem sensus no-
stri percipiunt, cum in altissimorum etiam montium
cacumina conscenditur, admodum minui, sed in
ipsum etiam aerem ad extimos usque atmosphæræ
limites diffundi, e nullius denique terrestris materiæ
actione, quæ sub sensum cadat, ejus efficaciam de-
rivari posse, in animum inducere non potuit, ut
eam repente adeo abrumpi crederet; sed tot ratio-
num momentis impulsus eo potius propendebat, ut
existimaret, gravitatis principium longe latius pate-
re, & ad cœlestia usque corpora extendi, ut ad
lunam quoque, globorum cœleste systema constituen-
tium nobis proximum, pertineret. Quæ postremis
hiscæ temporibus recens inventa sunt, etiam illud
nobis detexerunt, quam absurda sit eorum opinio,
qui cœlestia corpora e materia, cujus naturam ne-
mo

mo unquam assequi posset, atque ab ea prorsus diversa, qua tellus nostra constat, composita esse volebant. At Philosophi deinceps discrimen tam palmare sustulere penitus, quod originem suam non nisi superstitioni, aut vulgi erroribus debebat, jamque inter eos convenit, tellurém planetarum numero inferendam esse, quippe qui globi sint illi consimiles. Atque ut hæc inter corpora ista consensio pateret amplius, auctor noster demonstravit, ea constitui materia gravi & ponderante, ejusdem naturæ cum illa, e qua globus terrestris efformatur.

2. Effectus porro omnes, quos in terrestribus corporibus gravitas præstat, ad tres classes revocare licet. *Imprimis* enim corpus in quiete constitutum, cum terræ incumbit, aut chorda suspensatur, aut quavis demum ratione retinetur, nihil interim perpetuo ad motum vi gravitatis suæ exierit, quam tum quidem pressio adversus obstaculum, quod motum intercipit, metitur. *Secundo* dum corpus suo urgente pondere in recta verticali descendit, ejus motus continuis celeritatis incrementis augetur, vi scilicet gravitatis nunquam non in illud agente; aut vero, si fursum in eadem recta projiciatur, motus retardatur continua gravitatis actione in oppositum nitentis: & hæc quidem dum fiunt, gravitas mensuram accipit ab acceleratione vel retardatione motus, qui efficeretur quovis dato tempore, illa interim constante, & uniformiter agente. At si corpus per planum inclinatum decurrat, vel ascendat, aut intra materiam quampiam resistentem moveatur, ut vera gravitatis mensura inveniatur, ad leges Mechanicæ superiore libro expositas recurrendum est. *Tertio* si corpus alia

quavis directione, quam in linea verticali projiciatur, motus directio singulis temporis momentis mutatur, & nunquam interrupta gravitatis actione desertur in linea curva, vim gravitatis metiente ipsa curvatura viæ a corpore descriptæ. Quod si enim cetera paria sint, vis illa semper major est, quæ efficit, ut corpus magis deflectat a tangente curvæ, seu a directione, qua ferri cæpit, cum projiceretur. Hi omnes tam diversi gravitatis effectus nunquam non prope telluris superficiem observantur. Eadem quippe vis, quæ corpora gravia reddit, atque prementia, dum quiescunt, motus velocitatem auget, dum descendunt in recta perpendiculari, efficitque, ut, cum projiciuntur alia directione, quam illa, secundum quam agit gravitas, curvam percurrant; at de viribus, quibus corpora cœlestia afficiuntur, aliunde judicium ferre non possumus, quam ab effectibus, quos tertio posuimus loco. Prope telluris superficiem corpora projecta rursus in eam relabuntur omnia: at simile quid si lunæ globus præstare deberet, antea sane rerum ordo perturbandus esset penitus. Quæ in aerem ejiciuntur, haud amplius in recta perpendiculari ad terram descendere videmus, sed ita relabi, ut a tangente curvæ perpetuo discedant, sive ab ea directione, quam quovis momento temporis secuta fuissent, si tunc gravitas in ea non egisset: atque hoc gravitatis indicium in luna habemus: quamvis enim in tellurem minime decidat linea recta, observamus tamen eam quovis momento versus terram descendere, cum ab ea recta deflectit, juxta quam in principio cujusvis tem-

tempusculi ejus motus dirigebatur, id, quod non minore certitudine actionem gravitatis, alteriusve vis huic similis in lunam evincit, quam lapsus perpendicularis, siquidem libere versus terram cadere posset.

3. Si qua nobis suppeteret machina, qua corporibus vis sufficiens imprimeretur, ejus ope non modo hæc ad ingentia intervalla, antequam in terram reciderent, ejaculari liceret, verum etiam tanta celeritate projicere, ut quadrantem circuli maximi hujus globi percurrerent, imo si aer nihil obsteret, ut circum totam tellurem, quin eam contingerent alicubi, ferrentur, atque cum ad locum, e quo moveri cæperunt, rediissent, denuo eadem vi, qua primum a machina impulsæ fuissent, in circulum moverentur, itaque tertio, ac deinceps semper lunæ cujusdam, aut satellitis instar circa terram revoverentur. Jam vero id si prope telluris superficiem effici posset, sane etiam in majore atmosphæræ altitudine idem præstaretur, quin in ea quoque, quam ipsa habet luna, modo machinam eo usque evehere, atque illic corpus quodpiam ejus ope, aut quavis demum vi in effectum hunc sufficientem impellere, in nostra potestate constitutum esset. Quod si porro vis major adhiberetur, majoris quoque molis corpus hunc in modum projicere liceret; & siquidem e proportionem virium fieret accessio, pondus lunari corpore haud inferius primum quidem recta impelli posset, quod cum a via cæpta gravitate sua perpetuo detorqueretur, motum con-

continuum circa tellurem acquireret. Atque hunc in modum perspexerat Newtonus, motum lunæ in sua orbita, & corporum prope terræ superficiem projectorum curvilineas vias esse ejusdem sortis phænomena, quorum idem esset principium, a terra ad lunam usque actionem suam porrigens, neque aliud inter corpora nostratia, lunamque intercedere discrimen, nisi quod hæc & mole præstet, & projectionis vim jam a mundi origine ab omnipotente Universi Conditor receperit.

4. At enim ut assertionis evidentia plane constaret, demonstrandum erat, vires, quibus tum luna, cum prope tellurem projecta corpora in curvis lineis moventur, idem respicere centrum, & non minus actionis quantitate, quam directione congruere. Quidquid de vi quapiam nobis constat, vel ad ejus directionem, vel ad quantitatem attinet, ut si quando in duabus quibusvis horum constans quædam confensio deprehendatur, id fundamentum præbeat tutum, phænomena hæc vel eodem censendi nomine, vel ejusmodi, quæ a causis efficiantur similibus, aut certe quorum causæ ad eandem revocandæ sint speciem. Quod autem corpora gravia nisum versus terræ centrum exerant, superiore Capite ostensum jam est; at quod etiam vis, quæ directionem motus curvilinei lunæ perpetuo mutat, ad idem centrum tendat, ex Astronomorum observationibus colligitur. Hi namque reppererunt, lunam non describere accurate circulum, sed in elliptica, vel ovali orbita deferri, in qua jam propius ad tellurem accedat, jam majore intervallo ab ea removeatur singulis revolutionibus

tionibus, atque id ita, ut cum centro hujus globi vicinior fit, motu velociore feratur; tardiore in recessu; quod indicio est, eam ejusmodi agi viribus, quæ vel accurate in centrum telluris dirigantur, vel certe non longe ab eo aberrent.

5. Verum majoris claritatis causa fingamus, corpus quodpiam linea recta projici, quod nulla nova vi agente in ea recta ita progrediretur, ut secundum primam motus legem spatia æqualia æqualibus temporibus conficeret: & si porro cogitetur, e puncto aliquo fixo extra lineam illam sito ad corpus hoc semper duci rectam, dum interim æqualia intervalla intra idem tempus percurrit, is radius verret areas triangulares temporibus æqualibus æquales (a), quippe quarum bases æquales in corporis dire-

(a) Totum id innititur illi propositioni perquam notæ, quod *triangula super eadem, vel æqualibus basibus eandem altitudinem habentia, æqualia sint*, e qua imprimis facile deducitur, quod si, corpore in recta AF (fig. 52) uniformiter progrediente, atque partes æquales AB , BC æqualibus temporibus percurrente, semper ducatur radius ab hoc corpore ad punctum datum S , triangula ASB , BSC æquari debeant, quod bases AB , CB sint æquales, idemque communis vertex in S . Deinde si cogitetur vis quæpiam in corpus agere, dum in B est, versus S tendens, atque corpus in E translatura (si sola ageret) tempore eodem, quo motu uniformi spatium BC describit, fiet, ut corpus percurrat diagonalem BD parallelogrammi $BEDC$ æquali tempore, radiusque e corpore ad punctum S ductus verret triangulum BSD , æquale cum BSC , quippe quæ eandem habeant basin BS , & sint intra parallelas BS , CD ,
ut

Fig. 52.

directione sint, & vertex communis in puncto illo immoto. Sed concipiatur vis quædam ad idem punctum fixum tendens in corpus agere; feretur tum quidem deserta prima sua motus linea in nova directione; at area, seu spatium, quod linea e corpore ad idem punctum fixum ducta verrit, æquale prorsus erit illi, quod eodem tempore percurrisset idem radius, si vis hæc nova nihil egisset. Nam spatia hæc sunt triangula, quorum basis communis est prior corporis a puncto fixo distantia, & quæ intra easdem parallelas continentur. Itaque vis versus punctum fixum agens, nihil mutationis adfert areæ, seu spatio, quod radius e corpore ad illud punctum ductus verrit; & quamvis motum corporis seu acceleret, seu retardet, areæ tamen huic nihil inde vel demitur, vel accrescit; ut proinde radius ille vector circa punctum datum æquales semper areas æqualibus temporibus verrere pergat, quemadmodum id fecisset, si nulla nova vis corpori accessisset, libere atque uniformiter in prima projectionis linea progredienti.

6. Uti vero unicus versus punctum datum impulsus magnitudinem areæ, vel spatii a radio vectore confecti nihil mutat, ita nec quovis successivo-
rum

ut proinde area a radio percurfa illi æqualis sit, quam confecisset, nulla vi in corpus B agente. E quo clarum fit, areas, quas radius verrit, nec augeri, nec minui actione virium corpus versus S impellentium, ideoque radium e corpore ad punctum S ductum etiam deinceps semper æquales areas verrere temporibus æqualibus, si nulla præterea superveniat vis, quam quæ corpus versus S dirigit.

rum impulsuum versus idem punctum numero efficitur, ut seu longiore, seu breviori tempore ad eam percurrendam opus sit: & siquidem continua ponatur esse actio, corpus in curva deferet ejus motus celeritate aucta, vel imminuta, quin tamen mutationis quidpiam adferat areæ tempore dato a radio percur-
sæ, qui e corpore ad datum punctum ducitur: hæc proinde nulli variationi manebit obnoxia, semper illi æqualis, quam eodem tempore everreret radius, si corpus uniformiter motum in linea recta jam ab initio continuasset.

7. Conversa hujus theorematis propositio nos docet, æquale arearum incrementum, quas radius corpus cum puncto dato connectens percurrit, argumento esse, quod vis in corpus agens, atque ejus motum in curvam inflectens, in idem punctum dirigatur. Facile enim intelligitur, vi illa in alterutram ab hoc puncto partem nitente (*a*) aream a radio e puncto fixo ad corpus ducto descriptam, aut majorem futuram, aut minorem: unde si circa punctum illud areæ æqualibus temporibus æquales semper ver-
rantur, certi esse possumus de vis illius in idem punctum directione. Si corpus motu æquabili in circum-
lum ageretur, ut arcus æquales æquali temporis spatio absolveret, areæ eodem tempore a radio circuli

Q q 2

cor-

(*a*) Si nova quæpiam vis ageret in corpus B, dum ad B pervenit, atque dirigeretur in alterutram puncti S partem, corpus B eodem, quo prius tempore haud esset in recta CD, sed vel ultra, vel citra eam, ut proinde area a radio vectore ex S ad corpus ducto descripta vel major, vel minor fieret, quam B S C.

corpus cum centro connectente confectæ æquales forent, neque dubium esse potest, vim, quæ motum curvilineum in corpore efficit, versus hoc centrum dirigi; ad quodvis enim aliud punctum si tenderet, fieret sane, ut celeritas corporis eadem ratione cresceret, vel decresceret, qua vel ad punctum illud accedit, vel ab eo recedit. Pluribus hæc propositio exponenda nobis fuit, quando tantum Philosophiæ nostræ interest, ut rite animo comprehendatur. Hinc porro discere licet, vim, qua luna in orbita sua retinetur, in centrum telluris niti, quod areæ, quas radius e centro hujus globi ad lunam ductus æqualibus temporibus verrit, inter se æquales sint, motusque hujus planetæ velocior, aut tardior, ut terræ vel vicinior sit, vel longius ab ea distat. In sequentibus patebit, exiguam quandam arearum istarum inæqualitatem apprime ab Auctore nostro facere, novumque ejus Philosophiæ pondus addere.

8. Est igitur vis quædam, quæ in lunam agit, gravitati similis, & in telluris centrum directæ. Uti autem hæc efficit, ut luna singulis momentis temporis a directione sua versus terram deflectat, ita projectionis motu sublato eam penitus in terram daret præcipitem; & quoniam præterea actione continua, & nunquam interrupta ejus motum afficit, directionem in lineam curvam perpetuo inflectens, celeritatem inter cadendum continuis augeret incrementis, non secus, ac corporum gravium, cum deorsum labuntur. Illud tantummodo reliquum est, ut ostendatur, hanc vim in lunarem globum tam efficacem non minus in actionis quantitate, ac in ceteris omnibus, cum gravitate accu-

accurate convenire. Priusquam tamen duas hasce vires inter se componamus, observandum nobis est, eam, quæ in lunam agit, haud in omnibus a tellure distantis, æqualem esse, sed eo majorem, quo telluri fuerit propior. Veritatem hujus quisque facile comperiet, si cogitet, ut mutatio inducatur motui in linea curva, majore vi opus esse, si major sit corporis velocitas, quam si cum minore celeritate eandem curvam describat. Quod quamvis per se admodum clarum sit, hunc tamen in modum magis adhuc illustrari potest: esto recta quædam (*fig. 53*) arcus exigui extremum tangens, quem corpus mox percurrit; & quia hac recta progressum fuisset, nulla nova vi in illud agente, depressio alterius arcus extremi infra hanc lineam efficaciam actionis metiatur, necesse est. Porro evidens est, quando eadem est arcuum curvatura, longioris arcus extremum alterum magis a tangente in altero extremo discedere quam brevioris, ideoque corpus longiorem arcum eodem tempore percurrans majore vi a tangente retrahi, ac quod arcum brevioris describit. Jam vero quo luna telluri vicinior fit, eo magis ejus motus crescit, & in minore distantia semper velocitate majore fertur, quæ minima est, dum ad distantiam maximam pervenit; arcus itidem, quos in maxima ac minima distantia describit, eandem habent curvaturam, quare ut vis in lunam agens in minore distantia, quando majorem habet celeritatem, major sit, oportet.

Fig. 53

9. Neque jam difficile fuerit legem cognoscere, secundum quam vis isthæc in maxima, minimaque a tellure distantia mutetur. Et ut investigatio expedi-

tior sit, rem in exemplo planissimo consideremus, fingamusque, distantiam minimam esse maximæ dimidiam. Id si esset, luna cum distantiam minimam nacta foret, dupla celeritate moveretur, ut area a radio vectore lunam cum terra conjungente percurfa æqualis esset areæ, quam æquali tempore similis radius verreret luna ad maximam distantiam delata, atque adeo ut in minima distantia tempore unius minuti conficeretur arcus illi æqualis, qui intra duo minuta describeretur in distantia maxima, tantumque luna in extremo arcus percurfi in perigæo post unum minutum a tangente distaret, quantum ab eadem defleceret post duo, cum in orbita sua ad apogæum perveniret: hinc projectionis vi cessante in distantia minima, tempore unius minuti tantum spatii versus terram labendo conficeret, quantum intra duo minuta emetiretur, si in distantia maxima idem projectionis motus tolleretur. Sunt autem per ea, quæ Lib. II CAP. I §. II demonstrata sunt, spatia a corporibus gravibus cadendo confecta, ut temporum quadrata, illudque alterius est quadruplum, quod tempore duplo describitur, ac proinde luna in maxima distantia libere sibi relicta tempore duorum minutorum per quadruplum illius spatii descenderet, quod intra unum minutum percurreret: unde conficitur, lunam e distantia minima versus terram recta labentem quadruplo majus spatium decursuram, quam eodem temporis intervallo e distantia maxima cadens describeret. Atqui si tempora æqualia, & exigua sumantur, corporum gravium labentium vires sunt in spatiorum ratione, quæ hisce agentibus conficiunt: igitur vis in lunam agens, cum minimam nacta est distantiam,

illius

illius est quadrupla, qua urgetur in distantia maxima, si hæc ponatur minimæ dupla, id est, virium ratio erit 4 ad 1, si distantia fuerint ut 1 ad 2. Ex his palam fit, vim, quæ lunam ad motum in orbita curvilinea peragendum cogit, augeri, cum minore a terra intervallo abest, ut in quadruplam excrescat, hoc ad dimidium reducto; & eadem prorsus ratione ostenderetur, si maxima distantia esset minimæ tripla, ut arearum æqualitas, quas radii centrum telluris cum hoc planeta jungentes everrent, conservaretur, vim in eum agentem in distantia minima, idem effecturam intra minutum unumquod intra tria præstaret in maxima; ita quidem, ut si ex utraque libere posset descendere versus nos, novies majus intervallum in minima percurreret, quam eodem tempore in maxima, ut propterea vis, cui descensus deberetur, in subtriplo distantia foret non-dupla; sive ratione distantiarum sumpta 1 ad 3, vires gravitatis in utraque agentes essent ut 9 ad 1, quæ est ratio inversa duplicata distantiarum. Universe denique ratione distantiarum quavis majore, vel minore assumpta, consimili ratiocinandi methodo eruetur, velocitates planetæ in orbita sua revoluti semper eandem secuturas, vires autem ipsas eum incurva retinentes fore in reciproca duplicata.

10. Exhibeat generatim *T* (*fig. 53*) centrum telluris, *ALP* orbitam lunæ ellipticam, *A* apogæum, *P* perigæum; *AH*, *PK* sint tangentes in iisdem punctis; *AM*, *PN* arcus exigui a luna in his distantis versante æquali tempore percurssi; *MH*, *NK* subtendant angulos contactus, occurrentes tangentibus in *H* & *K*: erunt *MH*, & *NK*
æqua-

Fig. 53.

æquales spatiis, quæ luna libere e punctis A & P
 cadendo eodem tempore conficeret, atque in ratione
 virium in lunam illic agentium, ejusque motum a
 directione rectilinea in curvam inflectentium. Suma-
 tur Am æqualis arcui PN , & agatur bm ad AP
 parallela, quæ tangentem in A fecet in puncto b .
 His ita constitutis, cum eadem sit ellipseos in A &
 P curvatura, erit mb æqualis cum KN , & si qui-
 dem luna libere cadere posset e locis P & A ver-
 sus tellurem, effectus gravitatis in P tanto major
 esset, quam in A , quanto mb major est, ac MH :
 est vero mb spatium, quod luna vi gravitatis
 in A libere describeret eo tempore, quo motu pro-
 jectionis conficeret Ab ; & MH est spatium, per
 quod vi gravitatis in A libere caderet, quo tempo-
 re projectione ferretur per AH : quare cum hæc
 spatia sint ut temporum quadrata, sequitur, esse m
 b ad MH , ut quadratum rectæ Ab ad quadratum
 rectæ AH , seu quod areæ TAH , TPK sint
 æquales, ut quadratum TP ad quadratum TA ; est ita-
 que gravitas in P ad gravitatem in A , ut quadratum TA ,
 quadratum TP , hoc est, gravitas lunæ in terram
 ad crescit in ea ratione, qua quadratum distantiae a
 telluris centro decrescit. Newtonus tum ex dire-
 ctione vis in lunam agentis, tum ex ellipseos na-
 tura, hujus legis demonstrationem ad distantias quas-
 libet Planetæ extendit; & e curvæ hujus affectionibus
 eruitur, quod si sumantur arcus exigui, quos æquali-
 bus temporibus luna conficit, cujusvis arcus extre-
 mum alterum tanto magis infra tangentem in altero
 extremo versus terram inflectatur, quanto minus est
 quadratum distantiae a foco. Unde consequitur, vim,
 quæ

quæ e spatio inter arcus extremum & tangentem metienda est, in eadem esse ratione.

II. Ex Astronomorum observationibus discimus, lunæ orbitam haud multum a circulo abesse, cujus radius telluris semidiametrum sexagies contineat, indeque etiam peripheria sexagies major sit circulo terræ maximo, cujus magnitudinem Mathematici Galili 123249600 pedum Parisinorum reppererunt, e qua citra negotium circumferentia lunaris orbitæ innotescit, quæ cum tempore 27 dierum, 7 horarum & 43 minutorum percurratur, quem arcum luna intra unum minutum conficiat, plano admodum calculo invenitur. At enim illud indagandum est, quantum hic arcus infra suam in altero extremo tangentem deprimatur: & quoniam Geometria nos docet, id spatii esse terminum tertium continue proportionalem ad orbitæ diametrum, & arcum minuto uni respondentem, facili supputatione, esse $15\frac{1}{2}$ pedum mensuræ Parisinæ patebit. Tantum igitur luna spatii gravitate in terram percurrit, quæ proinde vis in distantia sexaginta semidiametrorum terrestrium efficit, ut tempore unius minuti luna $15\frac{1}{2}$ pedibus Parisinis descendat. Verum, ut quantum in globi nostri superficie ageret, intelligamus, fingamus eam esse lunæ orbitam, ut in minima sua distantia prope ipsam telluris superficiem transfiret. Enim vero id si fieret, sexagesies magis ad centrum accederet, & sexagesies majore velocitate ferretur, ut areæ, quas radius e Planeta ad centrum terræ ductus verteret, æquales permanerent. Unde luna, cum in minima distantia ad telluris superficiem veniret, in-

intra unum secundum temporis (seu partem minuti sexagesimam) arcum percurreret illi æqualem, quem in distantia media, qua nunc a nobis abest, non nisi intra minutum describit, tantumque secundo unico a tangente arcus in altero extremo defleceret, quantum nunc in vera sua orbita intra minutum; id est, minuto secundo $15 \frac{1}{2}$ pedibus Parisinis prope tellurem descenderet. Atqui tantundem accurate spatii terrestria nostra corpora gravitate sua hic apud nos emetiuntur, uti superius e certis observationibus retulimus: quare luna eadem prorsus velocitate, eodemque modo in globi nostri superficie descenderet, ac corpora quævis in terram gravia, quantum quidem nos assequi possumus. Et cum tam directione, quam actionis quantitate vis, qua lunæ motus regitur, cum gravitate corporum nostrorum congruat, nec minus continua, & nunquam interrupta agendi ratione cum gravitate consentiat, necesse est, ut vis hæc utraque ad eandem revocetur speciem, & ex causa eadem originem ducat.

12. Ea, quæ modo exposuimus, etiam hunc in modum supputari possunt. Quoniam lunæ distantia media a centro telluris sexagesies excedit distantiam corporum gravium in superficie globi nostri constitutorum, & ejus gravitas crescit in ratione quadrati distantiae decrescentis a terræ centro, hæc 60×60 vicibus, seu 3600^{ies} major foret prope superficiem telluris, quam nunc sit in distantia media, & propterea efficeret, ut luna in telluris superficie $60 \times 60 \times 15 \frac{1}{2}$ pedes Parisinos tempore unius minuti percurreret. Sed enim eadem vi agente 60×60

60^{ies} minus spatii conficeretur uno minuto secundo, quam intra minutum primum, uti ea nos docent, quæ frequenter in corporum gravium descensu observata sunt; igitur luna sua gravitate prope telluris superficiem labendo intra minutum secundum 15 $\frac{1}{2}$ pedes Parisinos percurreret, vi scilicet accurate eadem cum corporum terrestrium gravitate.

13. Hac igitur ratione Newtonus demonstravit, gravitatis principium ad lunam sese extendere, atque hunc planetam æque gravem esse, ac id constante experientia de corporibus ad tellurem pertinentibus docemur; lunam denique eadem agente causa in orbita sua retineri; quæ facit, ut lapis, globus, aut quod demum cunque corpus in aerem projectum curvam describat. Quod si luna, aut pars ejus quæpiam, inde in tellurem nostram transferri posset, atque ut corpus aliquod terrestre eadem directione, eademque velocitate projici, curvam eandem prorsus describeret; ac vicissim, si quod e tellure corpus ad lunæ distantiam evectum, inde directione, & celeritate, qua luna, projiceretur, in lunæ orbita pari cum velocitate moveretur. Itaque luna nil aliud, quam corpus quoddam projectile est, & corpus quodvis projecte imago lunæ cujusdam, aut satellitis. Phænomenorum vero istorum tanta est consensio in omnibus, ut manifestum sit, ea ex causa eadem proficisci.

CAPUT III.

De systemate Solari, nec non Planetarum, stellarumque fixarum parallaxibus.

I. **P**ostquam gravitatis actionem a telluris superficie ad lunam usque, & ulteriora quæque spatia ita extendi ostendisset, ut secundum eam constantem legem decresceret, qua distantiarum quadrata augentur, nequaquam hic gradum fixit auctor noster; verum ut pleraque majoris momenti inventa in hoc universi theatro nobis naturam veluti in novam educunt scenam, qua sese nobis spectandam præbet; ita rei tam fecundæ, de qua jam egimus, detectio in manibus tanti Philosophi, quantus erat Newtonus, sterilescere minime poterat. Lunæ gravitas ei viam ad universalem materiæ omnis gravitationem cognoscendam aperuit, illiusque Planetæ motuum tam feliciter inde expedita ratio, eum nequaquam in deducendis ex eodem principio reliquis, qui in systemate universo solari peraguntur, motibus curvilineis adhærescere sivit. Tellus nequitiam ut centrum spectari potest, circa quod corpus aliquod cœleste revolvatur, lunam si demas; & id quidem systema, quod globi hi duo constituunt, in vastissimis illis

illis solaris systematis spatiis, secundarii cujusdam tantummodo, & ut ita dicam, *subalterni* rationem habet. Inferiores Planetæ, *Mercurius* & *Venus*, terram suis orbitis haud complectuntur, sed ita manifeste circa solem revolutiones suas peragunt, ut quandoque longius a nobis, quam sol, absint, alias inter nos & globum illum transeant; at vero soli nunquam opponuntur, sive ab eo nunquam ultra certæ magnitudinis arcum discedunt, quem elongationem eorum maximam appellant. Planetæ superiores, *Mars*, *Jupiter*, & *Saturnus* equidem ejusmodi percurrunt orbitas, quæ tellurem ambitu suo contineant; verum motus eorum ita comparatos videmus, ut si ad tellurem referantur, extra omnes pene leges vagentur, ut proinde terram haudquaquam eorum centrum constituere possimus. Etenim cum quandoque ab occidente in orientem in orbitis suis progredi videantur, alias stationarii, seu motus expertes apparent, dum rursus retrogradi fiant, seu viam ab ortu in occasum remetiantur. Exerrationes ejusmodi, quamvis diversis in Planetis diversæ, tales in unoquoque profusus sunt, quales, ut nobis exhibeantur, motus telluris in sua orbita requirit.

2. Planetæ itaque omnes circa solem motus suos constante quadam lege peragunt, ab occasu in ortum orbitas ellipticas in eodem prope plano fitas, & quarum focum alterum sol occupat, peragantes, quanquam non nullæ proxime ad circulares accedant. *Mercurius* infimum tenet locum, atque maxima velocitate in omnium minima orbita intra duos menses, & viginti octo dies revolvitur. Hunc *Venus*

nus ordine in systemate excipit, quam Hesperii, Phosphorive nomine insignimus, uti solem seu ex orientis, seu ex occidentis parte comitatur, ideoque ejus occasum aut sequitur, aut prævertit: orbitam hic planeta tempore septem mensium, & dierum quindecim percurrit. Sed supra hunc utrumque tellus cum suo satellite luna orbem annuum describit. Mars terra superior primus est, cujus orbita, quam intra anni, decem mensium, & viginti duorum dierum spatium emetitur, cum sole globum nostrum ambiat; tum multo adhuc altior, atque ad ingentem distantiam Jupiter cum quatuor suis satellitibus, spatio annorum undecim, decem mensium, & quindecim dierum semel revolvitur. Supremus denique omnium Saturnus quinque satellitibus, ac peculiari præterea annulo quodam cinctus uti in orbita vastissima, ita motu lentiore desertur, nec nisi viginti novem annorum, quinque mensium, viginti dierum tempore ejus ambitum absolvit.

3. Si mediocrem terra a sole distantiam in 100 partes æquales tribuamus, Mercurii, Veneris, Martis, Jovis, & Saturni distantis mediis ex ordine obvenient id genus partes, 38, 72, 152, 520, & 954 propemodum. Aut si major in iis petatur accuratio, terræ distantia media in 100000 partes divisa, singulis priore serie enumeratis competent partes 38710, 72333, 152369, 520096, 954006

Porro Mercurii & Veneris distantia ex elongatione eorum maxima a sole reperiuntur. Cogitetur
 Fig. 54. (fig. 54) sol in S positus, tellus in T, & veneris orbi-

orbita AVB accurate circularis, quam in V tangat TV ; erit V locus Veneris, dum maximam habet a sole elongationem, & cum triangulum SVT fit ad V rectangulum, est ST , distantia terræ a sole, ad SV , distantiam Veneris ab eodem, ut radius ad finem anguli STV elongationem maximam metientis. Hac itaque methodo Planetarum inferiorum distantiae a sole cum ea, quam tellus habet, conferri possunt. Verum superiorum Planetarum distantiae ex eorum retrogradatione, & satellitum eclipsibus, si quos habeant, eruuntur. Exempli causa si Jovis in I (fig. 55) constituti centrum jungatur cum centro solis S recta SI , hac in M producta, congruet I M cum axe umbræ a Jove projectæ, cujus situs ex observatis satellitum eclipsibus determinatur, tenditque ad locum Heliocentricum Jovis, id est, ad eum, in quo e sole visus appareret. Producatur TI , telluris & Jovis centra connectens, usque in N , exhibebit N locum Jovis Geocentricum, sive illum, in quo hæere videtur, si e tellure spectetur. Utriusque hujus loci differentia mensuram anguli NIM , vel TIS præbet; angulus vero ITS , seu Jovis a sole elongatio, uti quidem spectatori in tellure T posito apparet, facile ex observatione reperitur: unde notis singulis angulis trianguli TIS , ratio laterum habetur, eadem nempe, ac quæ inter sinus angulorum intercedit, ut proinde ratio de SI , seu Jovis distantia a sole, ad ST , distantiam terræ ab eodem, non possit non esse comperta. Demum angulus TIS is est, sub quo semidiameter orbitæ telluris videretur e loco I , seu est elongatio terræ a sole, qualis ab observatore in Jove constituto inveniretur.

Fig. 55.

4 Diffuse admodum capite primo hujus libri exposuimus, qua ratione ex parallaxi, quam vocant, diurna, five angulo, sub quo telluris semidiameter e corpore quovis cœlesti videretur, planetarum distantia reperiri possint; atque hujus methodi ope lunæ a nobis distantiam cum globi nostri semidiametro conferre licet; Veneris quoque, & Martis distantia minima, cum ad eam pertingunt, e parallaxi æstimatur. At ceterum accidit plerumque, ut telluris semidiameter cum immanibus illis corporum cœlestium intervallis collata tam exigua sit, ut angulum, sub quo ex iis distantis appareret, instrumentis nostris haud satis accurate metiri liceat, id, quod Astronomis necessitatem attulit, aliorum quoque inventorum adminiculis utendi. Dum Aristarchus ad reperiendam solis distantiam tempus observari voluit, quo disci lunaris dimidium ab eo globo illuminatur, specimen quoddam methodi præbuisse videri potuit, in qua semidiameter orbitæ lunæ in locum semidiametri terræ substitueretur. Exhibeant S & T (fig. 56) solem & terram, L locum lunæ, cum TL rectæ SL ad angulos rectos insitit; quo nempe tempore nobis lunæ discum circulus, qui communis est umbræ & lucis in ejus globi superficie terminus, secat bifariam; evidens sane est, fore tum TS, terræ a sole distantiam, ad TL, distantiam lunæ a terra, ut est radius ad sinum anguli LST, complementi scilicet alterius STL, five elongationis, quam id temporis luna e sole habet. At enim hæc metiendi ratio, magna licet cum ingenii laude excogitata, eventu sperato caruit, quod facile adverterint Astronomi, cum in usum redigenda est, viam haud patere tan-

Fig. 56

tanta cum accuratione reperiendi temporis, quo lunaris disci dimidium collustratur, quanta eam in rem postulatur. Illud interim ex ea constitit, lunæ a terra distantiam bene multis vicibus ab illa excedi, quam sol habet: clarum quippe est, quo angulus STL recto propior est, eo intervallum ST majus futurum, si cum TL componatur; & siquidem ST infinitum evaserit, angulum STL in rectum desitutum. Jam vero cum Astronomis difficile admodum accidat, inter angulum STL , & rectum discrimen accurate statuere, sive inter tempus, quo medium lunæ discum lumen occupat, & inter tempus quadraturæ, consequens est, ST multo majorem esse quam TL .

5. Quoniam itaque Astronomi nihil opis repererunt in parallaxi diurna seu ad inveniendam, seu ad comparanda inter se maxima illa intervalla in spatiis cœlestibus, quod telluris semidiameter pro hisce dimensionibus basin præberet nimis exiguam, ad parallaxin annuam, uti appellant, confugerunt. Quare loco semidiametri telluris, ipsius orbitæ, quam terra circa solem anni spatio decurrit, semidiametrum adhibent, & cum in binis prius stationibus binos constituissent observatores, alterum in superficie, in centro terræ alterum; nunc postremi vice is fungitur, quem in sole fingunt constitutum. Atque sic demum tantæ magnitudinis basin obtinent, ut intervalli cujuslibet in systemate solari metiendi, portionis non exiguæ rationem habeat, cujus ope ex accuratis observationibus deductas distantias inter se quoque comparare liceat. Et quemadmodum, cum

S s

paral-

parallaxi diurna uterentur, intervalla corporum cœlestium semidiametro telluris conferebant, reperto angulo, sub quo in iisdem apparitura erat; ita prorsus annua parallaxi ad usum vocata maximas planetarum a sole distantias cum orbitæ telluris semidiametro contendunt, invento pariter angulo, quem ex iisdem intuenti subtendere videretur. Hic porro angulus major esset, si quis spectator in Martis globum transferretur, quam si ad Jovem usque removeretur; & in hoc planeta major item foret, quam in Saturno: ut proinde ea semper ratione decrescat, qua distantie augentur, dum tandem minor evadat in immensis illis intervallis, quam qui instrumentis, quæ maxima accuratatione elaborata ha-

Fig. 57. bemus, percipi possit. Repræsentetur (fig. 57) in I corpus quoddam systematis cœlestis remotius; A sit locus orbitæ telluris inter solem S & corpus I versantis; IT tangat orbitam terræ, quam interim circularem fingamus. Cum tellus ad A delata fuerit, corpus I ad eundem locum referemus, in quo e sole videretur; at vero ad T progressis nobis, si corpus I motu careat, in recta TI constitutum apparebit, facta interim retrogradatione per arcum, qui angulum TIS metitur, eundem nempe, quem ad I semidiameter orbis annui subtendit, qui si observatione inventus fuerit, erit ejus sinus ad radium, uti est ST ad SI, hoc est, ut distantia terræ a sole ad distantiam corporis I ab eodem, cujus analogiæ perfacilis est ex Trigonometria supputatio. Verum si corpori I suus itidem sit motus, hujus cumprimis rationem habere oportet, ubi de ejus magnitudine per observationes constiterit.

Et

Et apparentis quidem nobis motus speciem, si quem habeat corpus, hunc in modum exponere licebit. SI producta occurrat in M superficiei sphaerae coelestis, ad quam stellas fixas referimus; tangentes vero orbitae TI, tI ad eandem pertingant in N & n. Finge jam, corpus I intra limites N & n continuo eundo & redeundo oscillationes quasdam penduli ritu peragere, cum interea ipse hic arcus Nn motu corporis I proprio, atque secundum ejusdem directionem, in superficie BME abripitur. Quod si I exhibeat Planetam quempiam, arcus Nn, mensura anguli N I n, vel T I t, quanta ejus sit retrogradatio, ostendit; cujus dimidio SIT cognito, ratio SI ad ST, uti supra, reperitur.

6. Complura nobis suppetunt argumenta, quorum non nulla §. 1 & 2 indicavimus paucis, ob quae in systemate Pythagorico, a Copernico restituto, motum annum non soli, sed telluri tribuimus. Quod si tempora periodica Planetarum primariorum, eorumque a sole distantias, uti etiam tempora periodica satellitum, qui circa Jovem, & Saturnum revolvuntur, cum eorum distantis a suis primariis conferamus, ea lex universe in systemate solari obtinere videtur, ut si corpora varia circa centrum quodpiam orbitas suas describant, quadrata temporum periodicorum augeantur in ratione cubica distantiarum ab eo centro; hoc est, crescant in majore ratione, quam distantiae, non tamen in tanta, ac harum quadrata, sed accurate ut ea distantiarum potentia, cujus exponens est, $1\frac{1}{2}$, sive ut numerus inter eos medius

proportionalis, quorum alter distantiam, alter ejus quadratum exprimit. Jam quaecunque quis systema amplectatur, semper tellus constituenda est centrum motus lunæ. Quod si etiam sol circa tellurem revolutiones suas perageret, nil magis proclive esset, quam ut quis existimaret, etiam in eorum temporibus periodicis, & distantis inter se collatis legi generali locum esse, seu quadratum temporis 27 dierum, 7 horarum & 43' fore ad quadratum 365 dierum, 6 horarum & 9', ut est cubus distantiae lunæ a terra ad cubum distantiae solis ab eadem, qua proportionem inita, facile solis distantia obtingeret, quæ paullo magis, quam $5\frac{2}{3}$ vicibus, excederet lunæ distantiam, cum tamen e parallaxeos diurnæ exilitate sit evidens, solem pluries centenis vicibus longius a terra abesse, quam lunam. At vero si cum Copernico orbita telluris circa solem inter eas constitutur, quas Venus, & Mars describunt, communem eam legem temporum periodicorum, & distantiarum a sole ad omnes Planetas pertinere patebit, neque ulla exceptione systematis consensionem interturbari. Retrogradationes porro, stationesque Planetarum, & quævis demum tam motuum, quam distantiarum apparentes exerrationes, plurima nobis argumenta adversus Ptolomæi systema subministrant, in quo ea phænomena aliam explicationem haud recipiunt, quam quæ e compluribus orbibus solidis, variorumque epicyclorum inter sese implicatorum ingenti numero repetitur, quæ res parum admodum simplici illi Naturæ elegantiae congruit.

Illud quoque hac in re tenendum, id genus inæqualitates diversis in Planetis diversas esse, at tales in singulis, quales ut appareant, ratio motus telluris annui exposcit. Ingens solis moles, maximumque emolumentum, in omnia reliqua systematis mundani corpora ex eo redundans, quod velut jus quoddam prærogativum, ut centrum occupet, eidem tribuit, adeo sunt luculenta, ut pluribus exponi haud debeant. Equidem tellus, & Planetæ eum in finem circa solem revolvuntur, ut lucem, caloremque inde participant; at nulla prorsus sese offert nobis ratio, ob quam sol potius cum Planetis circa tellurem moveantur.

7. Unum modo est, ut expendatur, dignum, quod annuo telluris motui officere videtur, quod scilicet nulla in stellis fixis parallaxis annua deprehendatur. Sit $TA t$ (fig. 57) orbita telluris circa solem S , TX axis terræ, & tx ad TX parallela exhibeat situm ejusdem axis in puncto opposito t . Ponatur TX dirigi versus stellam P ; evidens est, axem terræ haud amplius versus eandem stellam respicere, cum in tx fuerit translatus, sed efformare angulum $x t P$ cum recta $t P$, quæ terram cum stella conjungit, æqualem angulo $t P T$, sub quo diameter $T t$ orbitæ annuæ spectatori in stella P constituto appareret. Facile hinc quis in animum induxerit, ut credat, nos observata hac stella P in diversis orbitæ locis T, t (quæ vicem binarum stationum subeant in resolutione Problematis, quod omnium fortassis, quæ Geometria Practica habet, maxime sublime est) nos, inquam, e di-

Fig. 57.

verso stellæ situ, quo in binis hisce stationibus nobis conspicua sit, de angulo TPt decernere posse, ideoque etiam de ratione, quæ inter TP , stellæ distantiam, & Tt , diametrum orbitæ, sive duplam telluris a sole distantiam, intercedit. Attamen certum est, Astronomorum perspicaciam penitus adhuc effugisse omne discrimen, quod apparens stellæ situs sive cum axe telluris comparatus, sive secum ipso, habeat, cum e diversis locis spectatur, quodque in telluris motum refundi posset; quanquam revocato in usum Pythagoræo hoc dogmate complures fuerint, qui summa cum industria rem istam sibi examinandam putarunt. Verum quod adversariorum huic argumento nervos omnes succidit, illud est, quod tanta sit stellarum fixarum distantia, ut orbitæ telluris diameter nullam penitus, quæ percipi possit, ad eam rationem habeat, ac propterea angulus TPt nullo queat instrumentorum genere, quæ accuratissima habere possumus, observari. Neque enim imensa hæc stellarum fixarum distantia vel ex arbitraria hypothesi, vel eo solum fine excogitata est a Copernicanis, ut adversus se allatæ rationis vim eluderent; sed quo jure semel ea corpora soli nostro similia statuerunt, eodem ad tam immania intervalla a nobis sejungere debuerunt, quando & tam parum luminis ad nos transmittunt, & tam exiguæ apparent diametri, quæ neque maximis telescopiis possit percipi. Quod si totum hoc intervallum inter stellam quampiam interjectum fingamus in 300 æquales partes sectum, & spectatorem 299 ejusmodi partibus versus illam progressum, videbit equidem stellam

lam vivaciore multo lumine radiantem, at diametri augmentum haud sentiet, cum ad postremum divisionis punctum pervenerit, sive ex $\frac{1}{300}$ totius distantiae parte eam conspexerit, quippe quæ illic eodem prorsus modo comparitura sit, atque isthic in tellure per telescopium visa, quod corporum dimensiones tercentis vicibus majores exhibet. Illud etiam ad evincendam tam abnormem distantiam stellarum fixarum vim habet ingentem, quod cum lunæ, alteriusque Planetæ interjectu visui subducuntur, occultatio hæc unico temporis momento peragatur, nequaquam vero lentis gradibus, uti in Planetis contingit, dum nobis propiores infra remotiorum discos subeunt. Hæc omnia si conjunctim sumantur, clarum equidem est, alia ab aliis robur accipere, tantumque abest, ut telluris motum evertant, ut etiam eidem stabiliendo sint quam maxime opportuna. Quin ipsa hæc tanta stellarum distantia, quam observationes ejusmodi, si rite colligantur, evincunt, ad majoris evidentiae gradum systema Copernici provehit, quippe cum, quo remotiores illæ sunt, eo magis a vero abhorrere videatur, spatia mensuram omnem tantum excedentia circa tellurem nostram gyronari, quæ e Planetis propinquieribus spectata scintillæ instar esset exiguæ, in remotioribus vix conspicua; in stella demum quapiam fixa visum effugeret omnino, quemadmodum vel totum systema solare, cujus pars est tantilla. Et credibile cuiquam videatur, corpora tam immania, tam profunde in spatii immensi abyssu demersa dietim orbitas vastas adeo circa hunc nostrum globulum describere; præsertim si quis ad illud etiam advertat animum, quod vero
ad

admodum simile fit, haud minoribus intervallis stellas alias ab aliis sejungi, totumque stelliferi cœli spatium, quod nocte serena nostris obtutibus exponitur, universi mundi systematis angulum tantummodo esse exiguum.

8. His addenda est summi momenti inventio, nostri temporis Astronomorum diligentiae, & sagacitati debita, quæ motæ telluris sententiæ pondus non exiguum adjungit, ejusque argumenti, quod in oppositum modo retulimus, quodque unum afferri cum veri specie potest, vim omnem elevat. Excogitarat celebris Grahamus, simulque summa dexterritate, & accuratione admirabili construxerat machinam, cujus descriptio in singulari opere Optices D. Smith prostat, quo Lectorem remittimus. Hac itaque quam exactissime in recta verticali constituta, Molineus, Bradleyus, ipseque Grahamus plurium annorum curticulo stellam in Draconis constellatione prope zenith transeuntem eum in finem observarunt, ut ejus parallaxin detegerent. Et sane adverterunt illico, stellam non in eodem semper instrumenti loco apparere, sed suam a zenith distantiam mutare, discrimine 21 aut 22 secundorum. Est autem ea stella polo eclipticæ vicina. Consimilibus observationibus aliarum stellarum institutis parem quemdam apparentem motumprehenderunt, qui latitudinis earum rationem sequeretur. Motus hic penitus dissidebat ab eo, quem parallaxis promitteret, neque longiore etiam tempore ulla iniri potuit ratio novi hujus phaenomeni explicandi; dum tandem Bradleyus omnes has vicissitudines & motibus luminis ac telluris inter se

se compositis methodo adeo plana derivavit, ut omnem sustulerit dubitationem. Cogitetur AD (fig. 58) exhibere exiguam orbitæ telluris portionem, C D radium luminis e stella fixa directione C D venientem; quod si terra quiesceret, telescopium situ AE parallelo ad lineam DC collocatum, versus stellam directum esset; sit autem AD ad DC, ut est velocitas telluris in sua orbita progredientis ad velocitatem luminis; equidem dubium non erit, quin telescopio situs AC tribuendus sit, ut radius luminis secundum axis illius directionem illabi possit, ut per medium vitri objectivi ad C ingressus, per medium rursus vitri ocularis A exeat; quippe quo tempore radius rectam CD percurrit, punctum A in D promovetur, ac totum telescopium sibi ipsi semper parallelum in Dc transfertur. Atqui locus stellæ apparens e telescopii situ definitur; unde stella in recta AC videbitur, non autem in AE, in qua reapse sita est. Hunc in modum stellæ in polo eclipticæ collocatæ latitudo minor deprehendetur angulo EAC vel ACD, qui 20 secunda excedet, siquidem velocitas luminis sit ad velocitatem terræ ut 8000 ad 1: eadem porro circulum describere videbitur, cujus ambitus a polo eclipticæ tanquam a centro, 20 fere secundis distat. At stellæ extra eum polum positæ exiguas ellipses percurrent, quarum centra vera earum loca (id est, in quibus conspicerentur, si terra motu careret) occupant, axes autem transversii eclipticæ sunt paralleli, secundi tandem axes eidem perpendiculares, quorum illi maximam aberrationem in longitudinem, hi vero maximam aberrationem in latitudinem præbent. Stellæ in plano eclipticæ sitæ

Fig. 58.

nulla est, præterquam in longitudinem, aberratio. Et tum quidem radiis e stella emissis orbitam telluris in G & H tangentibus, eandem vero secantibus in A & B sub angulo recto; quoniam tellus in G & H secundum directionem radiorum movetur, stella in loco suo vero apparebit citra ullam aberrationem, quando terra in illis orbitæ locis versatur; verum dum ad A & B pervenit, stellæ aberratio in longitudinem maxima esse debet. Hac itaque ratione omnes situs mutationes stellarum, quas cum Moluneuo observarat, Bradleyus explicuit; & quamvis annuam parallaxin incassum quæsierit, nihilominus novum argumentum, quod a motu telluris apprime faceret, ex observationum serie in admodum diversis stellis institutarum eruit. Eædem porro satis erant, ut tuto concluderet, parallaxin annuam vix unum minutum secundum excedere posse; e quo ipso consequitur, stellas fixas 400000^{ies} sole a nobis remotiores esse. Atque sic demum assertis motibus veris, qui in mundano systemate locum habent, fidentius jam analyfin cæptam promovebimus.

9. Omnes Planetæ primarii in curvis circa solis centrum deferuntur, velocitate eo majore, quo globo illi viciniore fiunt, eoque rursus minore, quo longius ab eo recedunt, ut radius e quovis Planeta ad solem ductus verrat areas temporibus æqualibus æquales. Hinc autem planum fit, uti Cap. II §. 5, 6 & 7 ostensum est, vim, quæ eorum motus in curvas inflectit, versus solem dirigi. Easdem hæc subit mutationes, quas lunæ in terram gravitas, ut eadem quoque ratiocinandi methodus, qua vires lu-

næ in terram, cum ad maximam, minimamque pervenit distantiam, Cap. II §. §. 8, 9 & 10 inter se contulimus, locum habeat, dum illarum ineunda est ratio, quæ in Planetas singulos primarios agunt, quando a sole vel recedunt plurimum, vel plurimum accedunt; e quo constabit pariter, eas ita crescere, ut quadrata distantiarum a sole minuuntur. Hanc virium normam generatim Auctor noster e natura ellipseos, qualis est cujusvis Planetæ orbita, demonstrat.

10. Verum eandem legem ad omnes pertinere communiter, omniumque motus Planetarum in hanc unam conspirare, eo magis semper elucescit, quo plurium periodi inter se comparantur. Enim vero quis non videat quam clarissime, vim in Planetam soli propiorem agentem ea multo esse majorem, quæ in remotiorem exeritur, quando illius velocitas non modo major est, verum etiam orbita contractior, majorisque curvaturæ, quæ magis a tangente deflectit, quam si in ampliore paris longitudinis arcus sumatur. Motibus Planetarum hunc in modum inter se compositis, vicinioris celeritas, alterius, qui longius abest, celeritatem superare deprehenditur ea ratione, qua radix quadrata numeri distantiam majorem exprimentis excedit radicem quadratam alterius, quo minor distantia designatur, ut proinde Planeta, qui quadruplo alterius intervallo a sole distaret, dimidia tantummodo velocitate moveretur, ideoque nonnisi duorum minutorum tempore arcum percurreret, quem intra unum vicinior absolveret, & quamvis fingeremus orbitarum utriusque curvaturam

ram eandem esse, soli tamen propior gravitate sua recta descendens uno minuto tantum emetiretur spatii, quantum duobus remotior, & hinc æquali tempore lapsus, ille quadruplum hujus conficeret, ad eam scilicet corporum libere cadentium legem, cujus tam frequens nobis fuit mentio facta; atque propterea si vel sola Planetæ vicinioris spectetur velocitas major, ejus in solem gravitas quadrupla sit, oportet, gravitatis remotioris. Sed enim quoniam minoris orbitæ radius quater contineri ponitur in radio orbitæ majoris, præterea necesse est, curvaturam majoris quater excedi a minoris curvatura, acceptisque arcubus exiguis, & æqualis longitudinis, extremum illius, qui ad orbitam minorem pertinet, quadruplo magis a tangente in extremo altero discedere, quam alterius extremum, qui in ampliore sumitur. Itaque si par etiam foret utrique celeritas, attamen ob solum orbitalium diversum flexum in Planeta propiore gravitas quadrupla requireretur. Unde si tum velocitatis, tum curvaturæ orbitalium conjunctim habeatur ratio, prorsus conficitur, gravitatem remotioris decies & sexies excedi a vi illa, qua versus solem Planeta propior urgetur, etsi non majore, quam quadruplo intervallo absit, id est, distantibus planetarum obtinentibus rationem 4 ad 1, eorum gravitates fore inverse ut 16 ad 1, seu ut quadrata distantiarum reciproce. Ad hanc normam Planetarum motibus compositis, intelligitur plane, eorum gravitates non alia decrescere lege, quam qua quadrata distantiarum a sole crescunt.

II. Collatis itaque consimili ratione motibus non modo ejusdem planetæ, cum in diversis orbitæ suæ locis versatur, sed etiam quos alii in aliis ellipsis peragunt, planum fit, esse quoddam virium genus, gravitati, quæ nobis tam perspecta est, corporum nostratum persimile, inde a sole ad interval- la omnia diffusum, itaque imminutum perpetuo, uti horum quadrata crescunt. Quod si Planeta quispiam in locum alterius transferretur, principii hujus actio- ne eadem, eodemque modo, ac alter ille, afficere- tur; & quemadmodum gravitas telluris nostræ par- tes conjunctas retinet, & ne diversis ejus motibus divellantur, impedit; ita vis quæpiam haud dissimi- lis in solis quoque superficiem agit, & penetrat in- time, partium nexum, globique figuram adversus motum revolutionis circa axem illæsam præstans.

12. Uti vero hoc principium motus planeta- rum in magno solis systemate moderatur, ita non minus satellitum circuitus in secundariis illis systema- tis regit, e quibus majus hoc coalescit, neque mi- nor illorum motuum, si cum distantis conferantur, deprehenditur consensio, quam quæ in primariorum circa solem revolutionibus elucescit. Sic Jovis satel- lites orbes suos circa ejus centrum inflectere vide- mus, atque infra tangentes, sive motus directiones, singulis temporis momentis versus illud deprimi, ut radii ab uno quovis ad Jovis centrum ducti tempo- ribus æqualibus æquales verrant areas, nec nisi ad idem eorum gravitas possit dirigi. Qui porro pro- priores sunt, majore feruntur velocitate ex eadem prorsus proportionem, qua soli viciniore Planetæ

primarii ceteros celeritate vincunt, ut proinde eorum gravitas e communi omnibus lege mutetur. Neque aliter res in Saturni satellitibus habet. Quare in hac etiam Planetarum specie vis quæpiam eorum massam continet, dum interim circa alios revolvuntur, quæ & in superficie eorum sese prodit, & inde porrigitur quaquaversus, iisdem decrementis, quæ a tellure, & sole in omnem partem diffusæ accidunt.

13. Sed præterea necesse est, ut Planetæ secundarii in solem sint graves. Neque enim motus eorum ad regulas tam accurate exigi possent, nisi earundem virium actionibus subjacerent. Si vim hanc acceleratricem directionibus parallelis in eos agere cogitemus, nihil propterea eorum motus erit implicatior, nihil perturbationis in ordine orietur; verum primarios suos comitari in illorum circa solem revolutionibus pergent, suis interim circa eodem orbitis ea cum accuratatione percursis, qua majorem haud exiges, cujuscvis primario motu omni destituto. Idem scilicet hic eveniret, quod in navi, aut quovis demum spatio motu uniformi progrediente, contingeret, in quo mutuæ corporum actiones eadem manent penitus, ac si spatium illud in quiete perstaret. Et quemadmodum corpus quodpiam per aera projectum haud definit in solem gravitare, unaque cum tellure circa hunc globum abripi, cum interim motu proprio in curva ad easdem leges exacta defertur, quas servaret, si terra quiesceret; ita etiam luna, quam ab alio quovis projectili non nisi magnitudine differre ostendimus, in solem ut gravitet,

tet, necesse est, dum simul cum tellure circa eundem revolvitur, neque hic motus menstruas ejus circa globum nostrum periodos impedit. Pari ratione Jovis satellites non secus in solem graves sunt, ac quævis globi Jovialis pars; sic & illi, qui Saturnum comitantur, in solem nituntur haud aliter, quam portio quælibet eum planetam constituens. Quare utrique hi motus tum in magno solis systemate, tum in minoribus omnibus, & planetis primariis propriis, locum habent, itaque consentiunt, ut nulla inde vel interruptio, vel perturbatio sit metuenda, exiguas quasdam si inæqualitates demas, quæ in viribus tam primariorum, quam secundariorum ob directiones non penitus parallelas enasci debent, & de quibus inferius agendi locus erit.

14. Nullum adeo corpus, ut ut insolentia sua extraneum videri possit, se unquam in inferioribus hisce systematis nostri spatiis in conspectum dat, ab illa communi in solem gravitate exemptum; ipsi cometæ vim illius tam manifestam produnt, ut motu eo magis concitato semper descendant, quò soli propinquiore sunt, qui perpetuo iterum in ascensu lentescit; ut trajectoriae circa solem recurventur, percurranturque a radiis ad centrum solis ductis areæ temporibus æqualibus æquales. Vis porro in cometas agens eandem mutationis legem subit, quam planetarum gravitas, ut vel manifesto est indicio, quod parabolæ, (*) aut ellipses admodum eccentricas per-

(*) Princip. Lib. III Prop. 40.

percurrant, in quarum foco altero sol est constitutus. Et Auctor quidem noster accuratam dedit demonstrationem, qua evicit, corporum vires parabolas circa focum describentium ea ratione, quam toties jam indicavimus, mutari. Si corpus quodpiam e nostra tellure in recta ad horizontem perpendiculari vi sufficiente (qua scilicet intra minutum quadringenties vicies mille passus motu uniformi percurrere posset) projiceretur, in ea linea perpetuo a tellure longius discederet, nunquam relapsurum; licet enim gravitas ejus motui moram injiceret, elidere tamen eum penitus haud posset, actione scilicet eo minus efficace reddita, quo corpus ad majora usque interval- la fuisset evectum. Quod si alia quavis directione par vis projectionis adhiberetur, corpus parabolam percurreret, foco in telluris centro constituto, ad quam nunquam amplius reverteretur. At paullo minore impulsu ejectum, in ellipsin motum inflecteret admodum eccentricam, ad eundem rediturum locum periodo longissima peracta, nisi fortassis interea nimia corporis alicujus coelestis vicinia a caëpta semita deturbaretur. consimili modo si viribus ad id requisitis planetarum aliquis projiceretur, in curva parabolica, focum in solis centro habente, perpetuo moveri pergeret. Motus itaque hi omnes ex eodem derivantur principio, viribus quidem admodum diversis, ut conditionum exigit varietas, agente, quæ tamen omnes in eandem legem conspirant, eoque prorsus reddunt analogos motibus, quos in corporibus prope telluris superficiem projectis oculis quotidie cernimus; ut proinde effectus adeo similes non nisi ex eadem causa possint repeti, quippe cum haud

magis evidens fit, eandem esse gravitatem, quæ corpora terrestria in Europa afficit, cum illa, quæ in America, seu prope æquatorem, aut polos agit; quam idem esse principium, cujus efficacia per universum hoc systema, inde a sole ad amplissimum usque Saturni orbem, aut cometam quemlibet maxime eccentricum, sese extendit.

15. Complura sunt phænomena, e quibus concludere liceat, solem sua ambiri atmosphæra, ad spatia satis magna ab eo globo extensa. Annulus ille lucidus in eclipsi totali solis anno 1605 circa lunam conspicuus, & cujus Keplerus meminit; atque idem etiam recentius An. 1706, & 1724 ad 9 vel 10 graduum intervallum lunam cingere visus, rectius refractione in solari atmosphæra efformatus dicitur, dum radii directi a luna intercipiiebantur, quam in lunari. Materia porro hujus atmosphære in solem gravis esse videtur, illius potissimum actionis indicio, quam in vapores caudarum cometarum exerit, a nucleo, & circumfusa illi atmosphæra, in plagam directioni eorum gravitatis in solem oppositam elevatos. Hos enim ad summam tenuitatem deductos vapores ea maxime directione excessu gravitatis in solem materiæ atmosphæram solarem componentis attolli non immerito crediderim, non secus, ac vapores apud nos columnæ instar in altum propterea assurgunt, quod eorum in terram gravitas ab aeris pondere vincatur; atque id jure potiore, cum videamus, & eo majore copia, & velocius id genus halitus evehi, quo cometa ad solem accedit propius. Quæ omnia ostendunt sane luculente, nullum esse in hoc systemate ma-

teriæ corporeæ genus, cui non ex merito gravitationem in solem tribuamus.

16. Quod ad stellas fixas, hæc ad adeo immensa remotæ sunt intervalla, ut earum in solem gravitas etiam plurium sæculorum decursu effectum habere nequeat, qui phænomeno quopiam sub sensus cadente sese prodatur. Etenim decrescit gravitatis actio, ut quadrata distantiarum majora evadunt; stellæ autem fixæ nobis maxime vicinæ pluries centies millenis vicibus longius a nobis absunt, quam sol; unde earum in solem gravitas plus quam 100000×100000 vicibus minor est, quam gravitas terræ in eundem. Neque phænomena nobis indicant, sed analogia tantummodo suadet, gravitatis vim ad ipsas usque stellas fixas pertinere. Nihil inde ad nos, quod sentiamus, pertingere potest, folique lumini vastam illam spatii eas a nobis separantis abyssum pervadere licet. Existimat interim Newtonus, argumento hac in re ab analogia ducto robur esse non exiguum. Quare si stellæ tum in solem, tum in sese mutuo graves sint, illud dicendum, per spatia immensa materia vacua, quæ systemata illarum alia ab aliis se jungunt, & in quibus verosimile est, quod centra non secus, ac sol in nostro, occupent, fieri non posse, ut seu motibus afferatur perturbatio, seu omnia hæc corpora in massam quandam vastæ, & informis molis aliquando confluant. Nec est sane, cur mirum cuiquam videatur, illic gravitatem in solem sentiri non posse, ubi ipse ille globus pene oculis sese subducit, neque isthic apud nos ullum gravitationis in stellas fixas reperiri vestigium.

17. Quo-

17. Quoniam inter actionem & reactionem ſemper in oppoſitis directionibus habetur æqualitas, ut cum terra exempli cauſa in montem gravitat, hic non minus in illam premat; cum corpus projectum, quamdiu in aere movetur, verſus ſe attrahit, hoc eodem niſu in terram tendat; (quam legem ſi tollas, nihil diuturnum, nihil ſtabile erit), conſequens eſt, ut ſol in omnia hujus magni ſyſtematis corpora gravitet, uti & planetæ primarii in ſuos ſatellites. Idem porro planetæ primarii in ſeſe mutuo graves ſunt, quod non nullæ exiguæ inæqualitates in eorum motibus notatæ quam evidentiffime produnt, maxime vero in Saturno & Jove, qui mole reliquos omnes ſuperant, obſervatæ, dum in conjunctionibus ad ſummam, quam habere poſſunt, propinquitatem perveniunt. Similibus exerrationibus ſatellitum Jovialium æque, ac Saturninorum curſus obnoxius eſſeprehenditur. Tot itaque, tamque graves rationes eo demum nos deducunt, ut in ſyſtemate ſolari corpora omnia mutua in ſe gravitate agere concludamus, quam licet cum materiæ natura ita connexam dicere haud poſſumus, ut ab ea nulla prorsus ratione abeſſe queat; fatendum nihilominus eſt, e phænomenis nos doceri, eam non minus ad univerſa corpora pertinere, ac affectionem quamvis aliam communem.



CAPUT IV.

De Gravitatione Materiae Universali.

I. **I**N superioribus vim tantummodo acceleratricem gravitatis ex diversis spatiis agentem expendimus, quibus velocitates, quas tempore dato efficit, ex proportionem respondent. Superest, ut ostendamus, motum a gravitate in corporibus æqualibus intervallis a centro dato remotis genitum e materiae modo metiendum esse; ipsam dein corporum gravitatem e partium gravitate mutua provenire; & denique ut etiam legem adferamus, quam partium istarum gravitatio sequitur. Et quod ad corpora terrestria, res est omnium consensu, pluribusque a Newtono institutis experimentis confirmata, quod ea, quorum volumen, ac figura eadem, licet ceterum indolis sint admodum diversæ, si e filis æque longis suspendantur, oscillationes suas, in quas pendulorum ritu excurrunt, æquali omnino tempore peragant; argumento scilicet, vim gravitatis ad massæ corporeæ mensuram exigendam esse: & siquidem aer nullum motui impedimentum afferret, ne tum quidem vibrationum tempora discreparent, quando figura & volumen forent quam maxime diversa, modo suspensionis, & oscillationis centra

trā manerent eadem. Ostensum jam est, lunam eadem velocitate versus terram casuram, qua corpus aliud quodvis grave, siquidem a centro pari spatio abesset: & præterea inter omnes convenit, vires corporum æquali celeritate motorum, massarum rationem sequi; itaque gravitas lunæ eam rationem ad gravitatem alterius corporis cujuscvis tantundem a centro telluris remoti habet, quam materia lunæ ad materiam illius corporis. Planetæ quidem primarii, uti alii aliis distant longius, ita actionibus urgentur admodum diversis, quæ tamen omnes hac continentur lege, ut si intervalla omnium horum globorum paria essent, omnes pari velocitate versus solem descenderent, motibus eo majoribus, quo quisque aliis materiæ copia præstaret. Eundem in modum fieri deberet, ut Jovis, ac Saturni satellites in centra suorum primariorum æquali celeritate ferrentur, si ex eadem altitudine laberentur. Tellus, ac luna viribus acceleratricibus iisdem, si intervalla essent æqualia, in solem impellerentur, eademque moverentur velocitate; Jupiter cum suis satellitibus iisdem celeritatis gradibus in solem incitaretur, si projectionis vis tolleretur. Idem prorsus de Saturno, ejusque satellitibus sentiendum. Exiguum tamen virium acceleratricium discrimen, quæ in planetam primarium, ejusque satellites agunt, ingentem varietatem in eorum motus inveheret. Quoniam igitur in his omnibus, velocitates æquales æqualibus temporibus efficerentur, motus corporum, ideoque etiam gravitas, motuum horum effectrix, materiæ quam accuratissime respondere debet: e quo consequitur, quasvis massæ portiones æquales, dum a centro ad

æqualia spatia constituuntur, æqualiter graves esse, quiscunque sit voluminis, figuræ, contextus partium modus, atque adeo corporum gravitationem ex illa, quæ singularum partium est, provenire.

2. Cum actio semper reactioni æqualis sit, si fingamus planetas eodem spatio a sole remotos, ideoque in eum vi materiæ suæ respondente gravitare, vicissim sol in singulos nisum exeret ex eadem proportionem definitum. Et universe idem corpus in quotcunque alia æqualiter diffita gravitat viribus singulorum massis congruentibus, quippe cum in ea semper agat viribus iis paribus, quibus vicissim ab aliis urgetur, atque hæc prorsus ex materia singulorum sint metiendæ. Hinc vis e centro solis & planetæ cujuslibet quaqua versum diffusa, in spatiis æqualibus ab eorum materia mensuram accipit, & generatim gravitas corporis eo major est, quotum massa propria, tum illius corporis, in quod actio dirigitur, major est, & simul quo minus est quadratum intervalli inter utrumque interjecti. Triplex hæc proportio si in unam componatur, pondus, motusque corporum ex eorum gravitate pendentes, semper definire licebit.

3. Dum tantus experimentorum, observationumque numerus in id consentit, quod gravitas quaslibet materiæ corporeæ particulas afficiat, potior semper a nobis erit ratio, si eandem ad omnia universe corpora pertinere dicamus, quando ejusmodi est, quæ non modo in superficiem corporum agat, sed massam totam ad ipsum usque centrum pene-

penetret; quæ non minorem exerceat potestatem in latentes intus particulas, quam quæ foris sese objiciunt oculis; cujus efficacia nullius corporis interjectu, nullo obstaculorum genere infringi possit; quæ denique illi soli mutationi in eadem materia obnoxia sit, quam diversa corporum, in quæ gravitat, intervalla requirunt.

4. Actio gravitatis in corpora ex ea provenit, quam in singulas eorum partes exerit, neque aliud est, quam omnium harum actionum collectio, ut proinde gravitatio corporum desumenda sit a gravitatione mutua partium. Gravitatio corporis cujuspiam in terram ex partium ejus gravitatione nascitur; vis, qua mons tellurem premit, pendet ex nisu ejus partium versus tellurem; hemisphærii Borealis gravitatio in Australe colligitur e corporum, quibus constat, omnium actionibus adversus illud; & si terram in portiones duas inæquales sectam cogitemus, gravitas majoris in minorem orietur e singularum illius partium viribus in partes singulas hujus conjunctim agentibus. Pari ratione si totius telluris, dempta unica particula, actionem in hanc ipsam particulam spectemus, ea constituitur e reliquarum omnium gravitatione in separatam illam moleculam. Quare quævis pars hujus globi in omnes, & singulas alias partes gravis est; & eodem argumento quælibet pars materiæ totius solaris hujus systematis gravitare dicenda est in omnes reliquas, e quibus immensa hæc rerum compages exsurgit.

5. Res

5. Res ipsa jam nos admonet, ut ad doctrinæ hujus caput maximi momenti progrediamur, hoc est, ut legem ipsam mutuæ gravitationis singularum partium definiamus, postquam illam ante oculos posuimus, qua corpora partibus illis constantia tenentur. Qui in rerum naturalium investigatione haud ultra corticem penetrare consueverunt, facile quidem sibi persuaferint, legem alteram nihil ab altera distare. Verum citra magnum negotium ostendetur, legem attractionis, quam singulæ materiæ molecule observant, longe diversam esse ab illa, quam sphaeræ ex illis particulis compositæ sequuntur. Sic, ut exemplo utamur, si partium gravitatio decreascit in ea ratione, qua cubi spatiorum, quibus altera ab altera abest, augentur, vel etiam in majore quapiam; sphaeræ ex hisce moleculis coalescentes, haud quaquam in sese mutuo agent viribus ex eadem proportionem imminutis, qua eorum centra a se recedunt, aut in majore illa: globi enim cum se contingunt, in hac hypothese infinites magis sese attrahunt, quam dum a contactu vel minimum remouentur, licet discrimen inter centrorum intervalla vix percipi possit. Atque hanc ob causam Newtonus necessitatem sibi imponi sensit, materiam hanc disquisitioni accuratissimæ subjiçendi. Et quia hæc theoriæ gravitatis pars summam habet utilitatem, neque, ut a Newtono pertractata est, sine abstrusioris Geometriæ, & calculorum maxime intricatorum notitia intelligi potest, operam dabimus, ut viam planiorem insistamus, ea duntaxat, quæ minus implicata sunt, persequentes, uti morem hunc adhuc tenuimus. Sumamus itaque imprimis, vim singularum parti-

particularum mutuam decrescere in ratione quadrati auctæ earum inter se distantæ, & sunt (fig. 59) Fig. 59.
 $PAEa$, $PBFb$ conii similes ex ejusmodi particulis constantes, ac basibus sphericis AEa , BFb , quarum centrum in P , clausi: erit gravitatio particulæ P in solidum $PAEa$ ad gravitationem ejusdem in solidum $PBFb$, ut est PA ad PB , seu in ratione laterum homologorum solidorum istorum similibus. Sit enim MNm superficies similis superficiæ AEa , habens idem centrum P , & erit gravitatio in superficiem AEa ad gravitationem in superficiem MNm in ratione composita ex directâ superficiæ AEa ad superficiem MNm (seu PA^2 ad PM^2), & reciproca PA^2 ad PM^2 , hoc est, in ratione æqualitatis: atque adeo si gravitatio in superficiem AEa dicatur A , gravitatio in solidum $PAEa$ exprimitur per $A \times AP$, & gravitatio in solidum simile $PBFb$ per $A \times PB$, quæ quantitates sunt in ratione PA ad PB .

Eodem modo gravitatio versus portionem superficiebus AEa & MNm comprehensam exhibebitur per $A \times AM$. Et consimili ratione evidens fit, quod, quamvis superficies AEa , MNm alterius sint figuræ, nihilominus ultima ratio attractionis particulæ P in solida conica, vel pyramidali $PAEa$, $PMNm$ sit PA ad PM : & si quidem AQ , Mq sint perpendiculara ad PH in Q , & q , erunt hæ vires ad directionem PH reductæ, ultimo in ratione PQ ad Pq . Hinc manifestum fit, quod si PB æquetur cum BA , attractio conii $PBFb$ in particulam P eum contingentem, sit æqualis attractio-

X x

ni

ni portionis intra superficies $A E a$, $B F b$ comprehensæ in eandem particulam, siquidem ponatur attractio crescere in ratione, qua distantiarum quadrata decrescunt. E quo illud consequitur, quod in hac hypothese attractio alicujus portionis materiæ in particulam contiguam non admodum excedat attractionem in eandem, quando hæc a contactu exiguo tantum intervallo removetur.

6. At enim aliter longe res habebit, si fingamus attractionem particularum singularum decrescere in ratione cuborum auctarum distantiarum. Tum quippe molecula in P constituta urgebitur versus superficiem $M N m$ vi, quæ sit directe ut superficies illa, seu ut $P M^2$, & ut cubus ejusdem $P M$ inverse, hoc est, quæ sit ut $P M$ reciproce, vel directe ut $M V$, quæ est ordinata hyperbolæ æquilatere $K V I$ intra asymptotos $P A$, $P K$; & propterea attractionem portionis $M N m A E a$ metietur area hyperbolica $M V I A$ inter ordinatas ad A & M ; attractionem autem conii $P M N m$ area hyperbolica infinita inter ordinatam $M V$, & asymptotum $P K$. Ex hoc vero evidenter conficitur, si hæc attractionis lex assumatur, particulam P in portionem materiæ utcunque parvam, quacum in contactu sit, longe majore vi niti debere, quam in corpus maximum, quod vel tantillum a contactu abesset. Idem haud majore difficultate demonstrari posset, si mutua particularum vis minueretur in ratione eadem, qua potentiae quævis cubis distantiarum altiores crescunt. Præterea intelligitur, attractionem alicujus particulæ in contactu corporis positæ haud multum advertendam

dam mutationem subituram, si pars quæpiam materiæ seu particulæ illi, seu corpori attrahenti in distantia, ut libet, parva accederet; at vero in omnibus hisce hypothesibus, si particula corpus non contingat penitus, motus ab attractione in distantis ultra omnes limites diminutis genitos in particula fore eo velociores, quo ipsa fuerit minor, cum vis eadem in materiæ portionem agens tanto majorem celeritatem efficiat, quanto minoris est massæ.

7. Eadem propositio demonstrari potest, quin ad hanc areæ hyperbolicæ affectionem recurratur. Sit (fig. 60) PA ad PB, ut PB ad PD, & concipia-
 tur animo utraque portio conï AB & BD in partes numero infinitas divisa, ita, ut portionis AB partes Ak, kl &c, inter se æquales, sint similes partibus Bm, mn &c portionis BD itidem inter se æqualibus. His ita constitutis erit Ak ad Bm, ut AB ad AD, & materia inter superficies, quarum radii e centro P sunt PA, & Pk, contenta, erit ad materiam comprehensam sectionibus sphæricis, quarum radii PB & Pm, uti est $PA^2 \times Ak$ ad $PB^2 \times Bm$; hoc est, ut PA^3 ad PB^3 . Porro vires attractrices partium æqualium intra superficies radiis PA & Pk descriptas contentarum sunt in eadem ratione reciproca, seu directe ut PB^3 ad PA^3 , ad vires attractrices partium, quæ continentur intra superficies radiorum PB & Pm, per hypothesin; & compositis hisce rationibus oritur ratio æqualitatis; cum igitur vires attractrices materiæ superficiebus similibus terminatæ sint in ratione composita attractionis singularum

X x 2

par-

partium æqualium, & numeri earum partium, sequitur, attractionem materiæ contentæ superficiebus radorum PA & Pk , esse æqualem attractioni materiæ contentæ superficiebus radorum PB & Pm . Ob eandem rationem attractio materiæ positæ intra superficies, quarum radii Pk , Pl , æquatur attractioni materiæ clausæ superficiebus, quarum radii Pm , pn ; uti & attractio portionis $AEaBFb$, attractioni portionis $BFbDGD$. Quod si deinde sumatur PB ad PD , ut PD ad PH , fiet rursus attractio portionis $DGDHRb$ æqualis attractioni portionis $AEaBFb$; & continuata hac progressionem Geometrica decrescente, manifestum est, quod si sumatur portio quævis materiæ comprehensæ intra binas superficies, quarum radii sint duo termini contigui seriei, ejus attractio semper æqualis sit cum attractione portionis primæ $AEaBFb$. Atqui terminum PB sequuntur infiniti alii, & in solido $PBFb$ portiones materiæ numero infinitæ continentur, quarum singularum attractio æquatur attractioni portionis primæ intra superficies AEa , BFb ; igitur attractio solidi $PBFb$ particulam P contingentis, est infinities major attractione portionis superficiebus AEa , BFb comprehensæ, quæ quidem omnium maxima est, attamen a contactu particulæ P remota. Id moræ tum demonstrando, tum illustrando huic theoremati dare visum est, cujus usus deinceps erit egregius, ejusque ope palam fiet, quid compendii habeat lex gravitatis, quæ in solari systemate primum præ aliis locum obtinet, quanquam non nunquam

quam ea res sint conditione, ut aliæ sint potiores habendæ.

8. Si partium minimarum ea ponatur gravitatio, quæ decreſcat, ut quadrata diſtantiarum augmentur, vires, quibus particulæ ſimiliter poſitæ a ſolidis ſimilibus, & homogeneis attrahuntur, ſunt ut earum diſtantiæ a punctis ſimiliter poſitis eorundem ſolidorum, ſeu ut latera eorum quævis homologa. Licebit enim ſolida in conos, conorumve portiones ſimiles mente reſolvere, quorum vertex ſit in iis particulis, eritque proinde gravitatio in conos, aut eorum ſegmenta, in ratione expoſita, per §. 5. Verum ſi attractio particularum minuat, ut creſcunt diſtantiarum cubi, vires, quibus urgentur ſimiliter collocatæ verſus ſolida ſimilia, & homogenea, æquales erunt. Quod ſi enim rurfus hæc corpora fingantur in conos ſimiles, aut eorum ſegmenta ita diviſa, ut & ſitum obtineant ſimilem, & verticem in particulis illis habeant, gravitatio in has portiones eadem ſemper manebit, per ea, quæ poſtremo articulo demonſtrata ſunt: eodem ſcilicet id evincetur modo, quo oſtendimus, particulam P in portiones ſimiles A E a B F b, D G d H R b eadem vi trahi.

9. Eadem gravitatis lex ſi obſervetur inter moleculas quam minimas, ut mutua earum vis eadem ratione minor evadat, qua diſtantiarum quadrata creſcunt; & collocetur ejuſmodi particula intra cavum corporis, quod vel annulari ſpatio intra duos circulos concentricos contento, & circa diametrum

X x 3

moto

Fig. 61.

moto generatur, vel vero quod oritur spatio intra duas ellipses similes relicto $ADBE$, $adbe$ (fig. 61), & circa axem revoluta, ea, inquam, particula nullam prorsus in hoc solidum gravitatem habebit. Nam exhibeatur particula in p , & recta p r ambitum interioris vel circuli, vel ellipseos in f & q , exterioris in x & r secet. Si punctum Z rectam xr dividat bifariam, etiam partes Zf , Zq æquales erunt, utpote cum figuræ similes, & similiter positæ sint: & hinc fiet fx æqualis cum qr , & gravitationes in portiones oppositas solidi, verticem communem in p habentes, lineisque iisdem terminatas (quæ nempe e p in utramque partem ducuntur) eadem erunt, per articulum 5, alteraque elidet alteram.

Hinc deducere licet, gravitatem particulæ Q esse ad gravitatem alterius P in eadem semidiametro positæ versus sphaeram, aut elliptoides ex integro solidum; sicut est CQ ad semidiametrum CP . Etenim cum solidi spatio annulari intra APB , a Q b geniti nulla sit vis in particulam Q , hæc non magis a solido $ADBE$, quam a solido $adbe$ attrahetur. Est autem posterioris hujus $abde$ attractio in Q ad illius $ADBE$ attractionem in P , ut CQ ad CP : quare in aperto est, gravitatem particulæ Q in eadem solidi semidiametro positæ esse ad gravitatem alterius P , uti est CQ ad CP . Atque ex his etiam illud intelligitur, quod si sphaera, aut sphaeroides æquabilis ubivis densitatis constet particulis vi attractiva in ratione reciproca quadratorum distantiae agente præditis, gravitas in eo inde
a su-

a superficie versus centrum, sumptis intervallis in data quavis semidiametro, decrescat eadem ratione, qua distantia a centro.

10. Cogitetur jam particula P (fig. 62) Fig. 62. extra sphaeram $A D B E$ ad intervallum $P C$ a centro C collocata; attrahetur in sphaeram vi decrescente in ratione quadrati auctæ distantia $P C$. Nam arcu $C H$ centro P , radio $P C$ descripto, ducatur recta $P N M$ occurrens circulo sphaeræ genitori $A D B$ in N & M , arcui $C H$ in L : huic intelligatur altera $P n m$ ex eodem P ducta infinite propinqua, secans eundem circulum in n & m , arcumque $C H$ in l ; $L R$, $l r$ sint ad $P C$ in R & r perpendiculares, uti & $C V$ ad $P M$ in V . Concipiatur planum circuli $A D B E$ secari a plano alterius $A d B e$ in communi sphaeræ axe $A B$, atque cum eo angulum infinite parvum comprehendere; $l u$, $l x$ denique ad planum $A D B$ normales occurrant plano $A d B$ in u & x . Gravitatio particulæ P in materiam, quæ superficiem physicam $L u x l$ constituit, metienda erit per $\frac{L l \times L u}{P L^2}$,

feu $\frac{L l \times L u}{P C^2}$; & hinc ea, qua nititur versus portionem pyramidalem comprehensam intra plana circularia $A D B$, $A d B$, & alia duo in rectis $N M$, $n m$ plano $A D B$ perpendicularia, mensuram habebit $\frac{L l \times L u}{P C^2} \times N M$, quemadmodum ex iis deducitur, quæ artic. 5 hujus Capitis demonstrata sunt.

sunt. At si angulus planorum ADB , $A dB$ idem maneat, utcunque recta PM mutetur, erit semper Lu ad LR , ut Dd (arcus in superficie sphaerae, seu distantia CD , interceptus a planis circularibus) ad C D vel CA ; & quia Ll ad Rr , ut PL (seu PC) ad LR , ideoque $Ll \times LR = PC \times Rr$; sequitur, mensuram gravitationis particulæ P in hanc portionem exprimi per $\frac{Ll \times LR \times 2VM \times Dd}{PC^2 \times CD}$

vel $\frac{Rr \times 2VM \times Dd}{PC \times CA}$. Hæc vis reducetur

ad directionem PC , si minuatur in ratione PV (aut PR) ad PC , & tum ejus

valor exhibebitur per $\frac{Dd \times Rr \times PR}{CA \times PC^2} \times 2VM$,

aut (quoniam ob PR^2 seu PV^2 æquale cum $VM^2 + NPM$ per Euclid. 2. 6, vel cum $VM^2 + APB$, & APB quantitatem constantem, incrementa momentanea de PR^2 & VM^2 æquari debent, & propterea si incrementum rectæ VM fit V_0 , semper est $Rr \times PR = V_0 \times VM$),

per $\frac{Dd \times 2VM^2 \times V_0}{CA \times PC^2}$, id, quod incrementum

quantitatis $\frac{Dd \times 2VM^3}{CA \times 3PC^3}$ repræsentat, quemadmo-

dum incrementum de VM^3 exprimitur per $3VM^2 \times V_0$, dum VM quantitate infinite parva V_0 augetur. Atque hinc liquet, attractionem portionis segmenti sphaerici intra plana semicircularia ADB , $A dB$ contenti, quæ ex eodem segmento reciditur per pla-

planum alterum, quod in recta NM infistit plano

A DB normaliter, esse ut $\frac{Dd}{AC} \times \frac{2VM^3}{3PC^2}$: & quia

attractio portionis sphæricæ, quæ generatur revolutione segmenti MDN circa axem AB, habet ad attractionem ejusdem segmenti MDN eam rationem, quæ est circumferentiæ totius ad arcum Dd, erit attractio portionis sphæricæ hunc in modum genitæ

ut $\frac{c}{r} \times \frac{2VM^3}{3PC^2}$ (ratione nempe peripheriæ ad ra-

dium per $\frac{c}{r}$ exposita), five erit directe ut cubus

chordæ MN, & reciproce ut quadratum distantiae PC particule P a centro sphære. Quare etiam, si densitas sphære data sit, erit gravitas particule P in sphæram integram, ut cubus hujus diametri, seu materiæ quantitas, directe, & ut quadratum distantiae PC reciproce, quandoquidem chorda MN cum diametro AB congruit, dum sphæra tota sumitur,

ut proinde hæc attractio metienda sit per $\frac{c}{r} \times$

$$\frac{2CA^3}{3PC^2}$$

II. Allata demonstratio illud quoque perspicuum reddit, particulam P extra sphæram positam in eandem non secus attrahi, ac si materia omnis per sphære volumen diffusa in ejus centrum collecta foret, indeque instar unius particule adversus P ageret.

Etenim circuli ADBE peripheria est $\frac{c}{r} \times CA$, area

Y y

$\frac{c}{r} \times$

$\frac{c}{r} \times \frac{CA^2}{2}$, superficies sphæræ $\frac{c}{r} \times 2CA^2$, ejusdem solidi-
 tas $\frac{c}{r} \times \frac{2CA^3}{3}$, & hinc massæ hujus attractio, quam
 e centro C in particulam P intervallo CP remotam
 exerit, exhibenda est per $\frac{c}{r} \times \frac{2CA^3}{3PC^2}$, quæ quan-
 titas est accurate eadem cum illa, quæ actionem
 sphæræ ad hanc distantiam metitur, per articulum
 superiorem. Idem dicendum de gravitate in sphæ-
 ras quocunque, quarum idem sit commune centrum:
 unde porro consequitur, gravitatem particulæ extra
 sphæram constitutæ in eandem esse directe ut quan-
 titatem materiæ in sphæra contentæ, & inverse ut
 quadratum distantiae a centro, quæcunque sit sphæ-
 ræ densitas in diversis a centro distantis, modo
 eadem sit in distantis æqualibus.

Si attractio mutua particularum fieret in ra-
 tione distantiae, eademque ratione cresceret, vel de-
 cresceret, qua hæc augetur vel minuitur; sphæra
 etiam in hac hypothese ita prorsus ageret, ac si
 massa omnis in centrum cogeretur unius instar particu-
 læ; at secus accidet, si aliæ particularum minima-
 rum leges statuantur. Fingamus, particulas mini-
 mas sese attrahere mutuo in ratione inversa distan-
 tiæ elevatæ ad potentiam, cujus exponens sit nu-
 merus quilibet n ternario minor; erit attractio sphæ-
 ræ id genus particulis constantis in moleculam in
 ejus superficie collocatam, ad attractionem materiæ
 totius in centrum collectæ in eandem moleculam in-
 ter-

tervallo radii distantem, ut est $3 \times 2^n = 2$ ad $3 - n \times 5 - n$. Exempli causa, si attractio particularum inter se maneret in omnibus distantis eadem (ut propterea fieret, $n = 0$), ratio exposita evaderet 4 ad 5; & si earundem minimarum molecularum vires essent reciproce ut distantie simplices; illa abiret in 3 ad 4, quemadmodum alibi ostendimus. (d)

12. Quoniam particulis sese mutuo attrahentibus in ratione inversa quadratorum distantie, demonstravimus, attractionem sphaeræ in ejusmodi particulam extra eam positam lege eadem teneri, quam moleculæ minimæ sequuntur, ideoque in ratione duplicata auctæ distantie a centro minui; necesse est, ut ipsius etiam particulæ vis in sphaeram, actione semper æquante reactionem, in eadem ratione sit variabilis: & si hujus particulæ loco substituatur sphaera altera e similibus moleculis composita, cum actio totalis hujus secundæ sphaeræ eadem sit, quæ foret totius massæ in centrum collectæ, jam fiet, ut binæ sphaeræ eadem in sese lege agant, qua particulæ minimæ in singularum centris positæ, d est, ut earum attractio e proportionem quadratorum auctæ distantie inter centra decrescat.

13. Cum itaque Newtonus corporum majorum gravitationem in eam, quæ minimarum partium

Y y 2

est,

(d) Tractat. de Flux. §. 902.

est, resolverit; lex autem, qua corporum istorum gravitas agit, eruta fit ex ipsis phænomenis supra diffusius expositis; sane ex earum, quas jam prius deduximus, consecutionum nexu perspicuum fit, hac prorsus lege moleculas, e quibus corpora coalescunt, teneri. Hac via ratiocinatione provecta illustris ille Philosophus omnem gravitatis a sphaeræ cujuslibet centro ad immensa usque spatia progressum in aperto posuit. Particula scilicet in medio globi totius puncto collocata, in nullam penitus plagam nisum exierit, undique ab ambiente sphaeræ massa æquali vi attracta. At si quam intra sphaeram nacta sit a centro distantiam, gravitate eo majore urgebitur, quo longius a centro recesserit, uti Art. 9 docuimus, quod nempe earum materiæ particularum tantummodo actionem experiatur, quæ illa propius a centro absunt, gravitasque sit ut materia attrahens directe, & quadratum distantiae a centro inverse: quæ res facit, ut, materia rationem cubi ejusdem distantiae obtinente, tandem gravitandi modus rationem directam distantiae sequatur, dum particula inde a centro usque ad ipsam sphaeræ extimam superficiem sensim progreditur, ubi vi omnium maxima, quam intra sphaeram habere potest, versus centrum connitetur: at extra sphaeram si exierit, ejus gravitas in ratione quadratorum distantiae a centro minuetur, lege per spatium omne ad extimos usque limites observanda, si quidem nil aliud intervenerit, quod agendi condiciones mutet.

Sermo autem nobis hic est de gravitatis vi acceleratrice, e celeritate metienda, quam quovis temporis momento dato efficere potest: quæ cum corporibus quibuscumque æqualibus temporibus æqualem velocitatem impertiat, siquidem ea pari intervallo a centro remota sint, evidens est, eorum pondera, & motus quantitatem, quorum causa effectrix est gravitas, e materiæ, qua constant, quantitate definiri. Generatim cum ponderis, aut motus ratio ineunda est, quo sphaera quævis in alteram, paribus a centro intervallis æqualiter densam, tendit, ea e triplice proportionem componenda est, nempe ex illa imprimis, quæ est materiæ corporum gravitantium, tum massæ sphaerarum, quas gravitate sua illa corpora petunt, ac denique quadratorum distantiarum, quæ inter singulorum sphaerarum mutuo gravitantium centra sunt. Atque hanc demum legem in universi hujus systemate locum habere phænomena nos docent. Vid. Artic. 2 hujus Capitis.

14. Itaque Newtonus non detexit modo, sed etiam observationibus quam accuratissimis, calculisque summo cum rigore initis stabilivit principium gravitatis mutue, simplex adeo, inter particulas minimas materiæ, quod per universum mundi systema e centro cujusvis globi ad immensa spatia diffusum, velut vinculum quoddam corporum tam vastorum partes colligat, atque unitas conservat, dum interim circa centra suis singula legibus revolvuntur. Eadem illa gravitas, quam in

tellure nostra tam perspectam habemus, afficit nempe reliqua omnia, ut quidquid materiæ toto continetur universo, in unum quodpiam corporum systema coalescat ejus efficacitati subiectum. Et certe principium hoc tam luculento ordine per totum mundi ambitum sese porrigens, causæ alicujus ubi-vis actuosæ, & potentis generalem quandam in omnia vim & ductum ostendit.

Nostro imprimis ævo variæ observationes habitæ sunt, e quibus plurimum huic doctrinæ roboris accedit, & quæ illud præcipue demonstrant, quod corporum majorum gravitatio e mutua eorum particularum actione proveniat; in quarum censum veniunt gradus meridiani a Mathematicis Gallis summa accuratione accepta mensura, & perpendiculi a linea verticali deviatio, ex vicini scilicet, & ingentis montis attractione.



CAPUT V.

*De materiæ quantitate, & densitate in sole,
& planetis.*

I. **A**D hæc usque cognitionem nostri Auctoris
 evexit analysis, dum in causas ex ef-
 fectis inquirens illud e tam accurata phæ-
 nomenorum consensione detexit, quod eorum prin-
 cipium latius multo pateat, quam quis antea sibi
 unquam persuasisset. At vero ut a causis jam in
 aperto positis rursus ad effectus via synthetica re-
 grederetur, satis non erat, gravitatem omnibus cor-
 poribus communem stabilivisse, sed præterea, quan-
 tum liceret quidem, ipsa virium in mundano syste-
 mate agentium quantitas, & mensuræ constituendæ
 fuerant. Vidimus jam, ab unoquoque corpore gra-
 vitatem quaquaversum ad æqualia a centro interval-
 la diffundi, quæ materiæ modum sequatur; vim
 porro hujus in superficie telluris ipsa nos quotidie
 experientia docet; & præterea rationem exposui-
 mus, qua ejusdem efficacia in quavis inde di-
 stantia æstimanda sit. Denique ut de viribus totius
 systematis in singula ejus corpora agentibus recte ar-
 bitrari nobis liceat, necesse est, ut, quam rationem
 cujusvis materia ad nostræ telluris massam habeat,
 decer-

decernamus. Id semel si præstetur, jam viribus effectricibus in universo systemate perspectis, illud supererit tantummodo, ut dextra Geometriæ, & Mechanicæ applicatione motus, & phænomena, quæ inde pendent omnia, corporum cœlestium deducantur.

2. Metiri materiam in sole & planetis contentam, summæ difficultatis problema erat, & quod supra humanæ mentis vim videri poterat. Verum quæstionis tam arduæ, cum de iis instituitur, quæ nosse interest plurimum, resolutionem & commodam, & naturæ ipsi maxime congruentem, Philosophiæ hujus principia suppeditant, jamque Newtonus rationem reperit, quam ad tellurem nostram materia habet, quæ solem, Jovem, Saturnum, ac lunam constituit, id est, quot globi terræ nostræ æquales e massis singulorum illorum corporum efformari possent, ostendit. Et ut rectius animo comprehendamus, qua demum via hanc ille comparisonem inire potuerit, id in memoriam revocemus, oportet, quod inter materiam singulorum eorum globorum, & gravitatis vim ad æqualia a centrīs spatia, æqua sit proportio. Quanta porro in tellurem hujus sit actio, tum e corporum nostratium descensu, tum e supputatis intervallis, quibus luna dato quovis tempore a tangente suæ orbitæ deflectit, intelligimus; & quamvis nullo nobis experimento constare possit ratio descensus corporis cujusdam gravis in recta versus solem, Jovem, aut Saturnum; cum tamen & planetæ primarii circa solem moveantur, & satellites revolvantur circa Jovem, & Sa-
tur-

turnum, si ad calculos revocetur, quantum planeta primarius infra tangentem suam certo tempore versus solem, & satelles versus primarium suum accedat, id nobis iam fundamentum præbet, cui comparatio gravitatis in sua cujusvis distantia versus solem, aut primarium, cum gravitate lunæ in terram, innitatur; tum vero e lege communi, qua vires hæ mutantur, reperitur ulterius, quæ cujuslibet eorum corporum futura esset actio, si in eadem a sole, Jove, Saturno, & terra collocarentur distantia; & quam hunc in modum respondere singulis prodent calculi, eandem massæ in iis rationem esse conficietur.

3. Plus materiæ in Jove, quam in tellure, esse, e satellitum motibus facile colligitur, qui omnes breviori tempore periodos suas circa illius centrum absolvunt, quam suam luna circa terram, etsi omnes (primum si demas) longiore a Jove intervallo absint, ac luna a terra. Secundi quidem a centro Jovis distantia superat distantiam lunæ a telluris centro ea ratione, qua numerus 3 excedit binarium, tantoque etiam ampliorem percurrit orbitam, in qua nihilominus revolutionem perficit tempore 3 dierum, & horarum 13, quod ne quidem septimam partem temporis periodici lunæ circa terram adæquat, ut proinde longe majore velocitate, quam luna, moveri debeat. Quod si satelles centro sui primarii propior foret, ejus quoque celeritas augeretur, ut in æquali distantia cum illa, quam luna a tellure habet, multo hac velocius revolveretur, ideoque etiam majore vi in centrum urgere-

Z z

tur,

tur, quando manifestum est, motum velociorem in æqualem curvam flecti non posse, nisi vi centripeta majore. Atqui materiæ quantitas in corporibus centra occupantibus rationem sequitur virium attractivarum in æqualibus distantis; quare massa Jovis globum constituens haud parum excedet illam, qua terra constat. Sic non minus clarum est, Mercurium semel circa solem revolvi tempore paullo majore, quam triplo ejus, quo luna terram circuit, quamvis orbitam 140 fere vicibus majorem percurrat, tot scilicet vicibus a motus sui centro magis diffitus; e quo palam fit, satellitem a tellure tantundem remotum, quantum Mercurius a sole distat, lentius multo in orbita sua progressurum, quam Mercurium, ut propterea solis attractio vim telluris plurimum vincat, &, quod consequitur, etiam materiæ plus insit soli, quam terræ. Sic denique Saturni massa superare deprehenditur eam, quam tellus continet; & Auctor noster ad hanc methodum subductis calculis, solis, Jovis, Saturni, & terræ materiam ea esse proportionem reperit, qua sunt nu-

meri 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, $\frac{1}{169282}$.

4. Materia jam omni, quæ singulorum horum corporum molem constituit, hunc in modum reperta, haud impeditus erit calculus, qui, quantum quodvis sub æquali volumine contineret, detegat, in quo nempe ipsa densitatum ratio consistit, quæ Auctori nostro talis obtigit, qualis est inter numeros 100, 94½, 67 & 400, cum eam in sole, Jove, Saturno, & terra supputaret. E quo elu-

elucet, terram esse Jove densiorem, Jovem Saturno; illos scilicet planetas e densiore massa esse compactos, qui soli sunt viciniore, quo calori majori ex illo globo recipiendo redderentur apti. Ex omnibus autem istis perquisitionibus, quibus abstrusam naturæ partem persecuti sumus, intelligimus, omnia in hoc universo situm obtinere maxime congruum, atque ordine eo esse collocata, qui sapientiam prorsus admirandam ubivis prodat. Si terra in Mercurii orbitam transferretur, nobis penitus inhabitabilis redderetur, maribus, & oceano calore illo mox ebullientibus, & in vapores per auras dispersis. Si ad Saturni orbem eveheretur, aquas constringi glacie, plantas & animalia frigore enecari necesse foret. At multo minus distantiae discrimen, quo tellus ad solem propius accederet, satis esset, ut zona torrida incolis destitueretur; aut si ab eo recederet, ut illi telluris tractus, quibus nomen temperatarum zonarum est inditum, inculti relinquerentur. Moderatior multo calor Joviali globo, laxioribus partibus constanti, convenit; & quam perniciem telluri ad Mercurii locum depressæ solis propinquitas afferret, eandem fors metuendam haberet Jupiter, si globo nostro substitueretur. Major adhuc materiæ in Saturni sphaera raritas tanto ejus orbis a sole intervallo plane congruit, & quamvis ultimo huic planetarum nonagesies minus luminis & caloris inde obveniat, quam nobis, id tamen haud oberit, quo minus in universo systematis mundani spatium hic illi locus sit maxime omnium opportunus, & alter quivis, quem seu Jupiter, seu planeta inferior quilibet occupat, æque sit illi futurus

rus funestus , ac nobis Mercurii cum sole vicinia. Omnes itaque planetarias orbitas Saturnina completur; & veluti parum nimis caloris ad ulteriora illa spatia penetraret, nullum ultra Saturnum corpus revolvi videmus, quamvis videamus non nulla, quæ inde in suis trajectoriis multo propius ad caloris, & luminis centrum descendant.

Denique non sine ratione concludemus, corpora hæc omnia eo ordine, eo situ esse disposita, ut nulla admodum in iis mutatio fieri posset, quæ non ingentia incommoda, ipsumque non nullis exitium invehret. Cartesio suam secuto hypothesin planetæ densiores a sole longissime removendi fuerant; at Philosophia ipsius naturæ observationibus innixa causis finalibus magis congruit, & ubivis Conditoris sapientiam luculentius ante oculos constituit.

5. Cum Astronomi nullum circa Mercurium, Venerem, & Martem detexerint satellitem, eorum vires attractivas, & quantitates materiæ inter se comparandi opportunitate destituimur, quæ in ceteris præsto erat. Attamen vero admodum simile ex iis fit, quæ de tellure, Jove, & Saturno attulimus, etiam in reliquis planetis densitates distantis a sole respondere, eorumque globos arctiore textu compactos esse, qui minus a sole sunt remoti. Supputaverat quoque Auctor noster vires attractivas, quæ in superficie solis, Jovis, Saturni, ac terræ agunt, eamque invenit inter illas rationem, quam ex ordine indicant numeri 10000, 943, 529, 435; quæ res mirum quemdam consensum prodit inter vim gravitatis horum corporum tantopere mole dissidentium, & inter eorum

rum superficiem: adeo, ut licet Jupiter terram pluries centenis vicibus excedat, ejus tamen gravitas in superficie non nisi duplo major sit, quam telluris in sua itidem superficie; ea vero, quæ in Saturni superficie agit, una tantummodo quarta parte superet corporum terrestrium gravitatem.

6. Virium præcipuarum rationibus in universi hujus systemate agentium ita constitutis, antequam ad effecta ab illis pendentia gradum faciamus, illud imprimis inquirendum nobis est, utrum per spatia omni corpore vacua efficaciam suam diffundant, an vero medium quodpiam motibus ab illis genitis resistat. Enim vero corporibus prope telluris superficiem projectis non exiguum velocitatis impedimentum ab aere objici cernimus; & siquidem hic ad spatia illa usque assurgeret, in quibus planetæ suas percurrunt orbitas, haud dubium, quin eorum motibus obsisteret plurimum. Sed quoniam experimentis nobis constat, aeris densitatem virium comprimentium rationem sequi, quæ sane aliæ sunt nullæ, præter atmosphæræ pondus, necesse est, ut quævis aeris portio, cum a telluris superficie receditur, ex imminuti ponderis proportionem, quod incumbit, minus densa sit; & hinc porro efficitur, ut, si interim gravitatis ipsius decremента non consideremus, atque altitudines inde a terra in progressionem Arithmetica sumamus, aeris densitas iis spatiis congruens in progressionem Geometrica decrescat. (*) Jam vero observationes tum in Galliis, tum in Anglia factæ nos edocent, aeris densitatem in altitu-

Z z 3

titu-

(*) Vide Halleyum in *Transact. Phil. N.* 181. nec non *Schol Prop. 4a. Lib. II. Princip.*

titudine perpendiculari septem millium passuum fere æquare partem quartam illius, quam is ad superficiem maris habet; itaque cum ad duplam altitudinem, sive quatuordecim millia, perventum fuerit, erit densitas tantummodo $\frac{1}{16}$; ad 21 passuum millia, $\frac{1}{64}$; ad 28

millia, $\frac{1}{256}$; ad 35 millia, $\frac{1}{1024}$; ad 42 millia,

$\frac{1}{4096}$; ad 49 millia, $\frac{1}{16384}$ pars illius, qua prope mare est præditus; & si femidiametri intervallo a tellure recederemus, sensu ullo percipi haud posset. At hæc experimenta iterata, & accuratissima evincunt, resistantiam fluidorum, quæ ab inertia materiæ pendet, in densitatum ratione esse; unde ea resistantia aeris, quæ prope telluris superficiem sentitur, in 49 millium passuum altitudine 16384 vicibus minor jam esset, neque etiam plurimorum sæculorum decursu ejus quidquam percipi posset in femidiametri telluris distantia; unde cum adhuc multo magis decrescat in iis spatiis, in quibus luna revolvitur, hæc sine ullo motus obice in sua orbita deferetur.

Ceterum medii alicujus aere tenuioris, quod resistantiam sub sensu cadentem pariat, seu isthic apud nos, seu in spatiis cœlestibus, neque ex experimentis, neque ex observatione indicium habemus.

Finis Libri Tertii.

Expo-