Der kleine Feldmesser.

Der kleine Feldmesser,

oder

erster Unterricht

in der

Geometrie.

Von

Ferdinand Schubert,
Lehrer an der k. k. Wiener Normal-Hauptschule.

Mit vier Steintafeln.

Wien.
Gedruckt bey Leopold Grund.

1831.

Dem

Hochwürdigsten Hochgeehrten Herrn

August M. Turzan,

des hohen Erz- und Domstiftes zum heil. Stephan Capitular-Domherrn, kais. königl. Oberaufseher der Volksschulen, erzbischöflichen Consistorial-Rathe, Inhaber des Verdienstkreuzes pro piis meritis,

als ein Merkmahl

der

innigsten Hochachtung und Verehrung

geweiht

vom

Verfasser.

Vorrede.

Ermuthiget durch einige meiner Freunde und mehrere der erwachsenen Schüler, welche meinem Unterrichte in der Geometrie beywohnten, wage ich es, gegenwärtiges Werkchen, als meinen ersten Versuch, wie man die Jugend auf eine leichte und angenehme Art in das Gebieth der Feldmeßkunst führen könne, öffentlich erscheinen zu lassen.

Allein, ich kann es nicht bergen, daß es mir bey Bearbeitung dieses Aufsatzes zuweilen Schwierigkeiten verursachte, zweckmäßige Vollständigkeit mit möglichster Kürze und einer solchen Deutlichkeit zu verbinden, welche Schülern verständlich und einleuchtend seyn soll, die durchaus nichts Anderes kennen, als die vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen und in gemeinen Brüchen, und das Nöthigste von einfachen Proportionen.

Um diesen guten Zweck zu erreichen, suchte ich in diesen Blättern das Theoretische der Geometrie immer gleich mit dem Practischen derselben zu durchweben.

Das Ganze zerfällt in drey Abschnitte; nähmlich erstens in die vorbereitende Geometrie, welche größten Theils nur Erklärungen und Beschreibungen enthält; zweytens in die beweisende Geometrie, welche die Lehren, die strenge bewiesen werden müssen, dann Aufgaben und Anwendungen enthält, und drittens in die rechnende Geometrie, welche die verschiedenen ebenen Figuren berechnen lehrt.

Die Beweisführung ist durchaus höchst einfach und faßlich. Da es jedoch immer Schüler gibt, die so schwach sind, daß sie bey aller Deutlichkeit des Vortrages doch nicht zur Einsicht des aufgestellten Satzes gelangen, so sey man zufrieden, wenn solche Schüler die Hauptsätze der Geometrie vor der Hand bloß historisch kennen; denn sollte sich in der Folge der Verstand mehr entwickeln, so wird er dem Gedächtnisse schon nachkommen.

Diesem ersten Unterrichte in der Geometrie sind vier Tabellen mit Figuren beygefügt. Damit die Anführung derselben nicht immer in die Mitte des Satzes eingeschaltet, oder am Ende desselben hinzugefügt zu werden braucht, so sind hier in der schmalen Spalte neben dem Vortrage der Geometrie Zahlen angemerkt, wovon die arabischen auf die zwey ersten Tabellen, und die römischen auf die nächstfolgenden zwey hinweisen.

Gott gebe, daß diese Schrift den Beyfall geschickter Lehrer ernte, und gute Früchte in ihren Schulen hervorbringe! —

Wien, am Frohnleichnamstage
des Jahres 1830.

Ferd. Schubert.

Inhalt.

	Seite.
Einleitung. Begriff der Geometrie	1
Ordnung beym Vortrage dieses Gegenstandes	—
Nutzen	3
Kurze Biographie des Archimedes	5

I. Abschnitt.

Vorbereitende Geometrie.

Einleitung	7
I. Von Linien	12
II. Von Winkeln	17
III. Von Dreyecken	22
IV. Von der Congruenz, Gleichheit und Ähnlichkeit der Dreyecke	25
V. Von Vierecken	27
VI. Von Vielecken	30
VII. Vom Kreise	31
VIII. Vom Maße und Messen der Linien	35
IX. Werkzeuge zum Messen gerader Linien	40
X. Vom Maße und vom Messen der Winkel	42
XI. Werkzeuge zur Winkelmessung	44
Allgemeine Grundsätze	51

II. Abschnitt.

Beweisende Geometrie.

I. Von Winkeln	52
II. Von Dreyecken	63
III. Von Parallelogrammen	72

	Seite.
IV. Von der Verwandlung der Figuren . . .	75
Der Pythagoräische Lehrsatz	82
Kurze Biographie des Pythagoras . . .	89
V. Von der Ähnlichkeit der Figuren und ihrer Theilung	94
Anwendungen im Felde	101
VI. Von Kreisen und Polygonen	124

III. Abschnitt.

Rechnende Geometrie.

I. Von Messung der Flächen	129
II. Berechnung geradliniger Figuren . . .	131
Berechnungs = Formeln	133
III. Kreisrechnungen	139
a. Kreislinien = Rechnungen sammt Formeln .	—
b. Kreisflächen = Rechnungen sammt Formeln .	143
Noch einige practische Aufgaben der Feldmeßkunst .	149

Einleitung.

§. 1. Die Geometrie ist eine Wissenschaft, welche den Raum zu finden oder auszumessen lehrt, den was immer für ein körperliches Ding nach seiner Länge, Breite und Dicke einnimmt.

Das griechische Wort Geometrie bedeutet eigentlich Erdemessung; und da sie ihre Anwendung vorzüglich bey Messen der Wiesen, Wälder und Felder findet, so viel als Feldmeßkunst.

Die Geometrie soll (als Feldmeßkunst) in Ägypter erfunden worden seyn, indem der König Sesostris jedem seiner Unterthanen gleich viel Land zugetheilt hatte, wovon jeder eine gleichmäßige Abgabe erlegte; verlor nun einer durch Überschwemmung des Nil's etwas von seinem Antheile, so wurde von einem Geometer ausgemessen, wie viel er eingebüßt hatte, und darnach die Abgabe vermindert.

§. 2. Bey dem Unterrichte in der Geometrie müssen die Lehren in einer solchen Ordnung auf einander folgen, daß man immer sicher von einer Wahrheit zu anderen gelange.

Daher kann nur das, was vollkommen einleuchtend ist, zum Grunde gelegt werden. Und Sätze, die so einfache Behauptungen sind, daß jeder, der ihren Sinn versteht, auch von ihrer Wahrheit vollkommen überzeugt ist, heißen Grundsätze.

Außer den Grundsätzen bedient sich die Geometrie auch der Forderungen, das sind Sätze, welche etwas verlangen, was so einfach ist, daß man keine Anweisung dazu nöthig hat.

Das, was nicht für sich einleuchtend ist, muß strenge bewiesen werden. Und ein Satz, welcher eine solche Behauptung enthält, deren Wahrheit erst bewiesen werden muß, wird ein Lehrsatz genannt.

Jedem Lehrsatze muß der Beweis folgen; und dieser zeigt, wie die angegebene Wahrheit des Lehrsatzes aus vorher erkannten Sätzen folge.

Sätze, welche etwas verlangen, das nicht so einfach ist, ohne eine Anweisung dazu nöthig zu haben, sind Aufgaben.

Die Anweisung, wie man zu verfahren habe, um dem Verlangten gehörig zu entsprechen, heißt Auflösung; und dieser muß wieder der Beweis, welcher die Richtigkeit der Auflösung zeigt, beygefügt werden.

Übrigens erscheinen die Ausdrücke: »Zusatz, Erklärung, Anmerkung rc.« ebenfalls sehr oft. Unter dem ersteren versteht man Sätze, die aus kurz vorhergegangenen gefolgert werden, und deren Zusammenhang mit diesen so klar ist, daß es keines besonderen Beweises bedarf. Die übrigen Benennungen wird sich jeder denkende Schüler selbst zu deuten wissen.

§. 3. Das Studium der Geometrie, und der Mathematik überhaupt, ist der Jugend sehr zu empfehlen.

Nicht nur darum, weil es den Geist aufhellet, den Verstand schärft, das Nachdenken übt, und den Sinn für Wahrheit, Gründlichkeit und Ordnung weckt, sondern auch darum, weil es uns bey vielen Gegenständen des bürgerlichen Lebens so vielen Vortheil zeigt.

Ohne Geometrie würde z. B. der Landwirth, der Bergknappe, der Förster, der Baumeister sehr unvollkommen seyn; denn die tägliche Erfahrung bestätiget, daß die Geometrie bey Ausmessungen, Berechnungen, Überschlägen und vielen anderen Beschäftigungen sehr wichtige Dienste leistet, und daß sich manche Handwerker und Künstler, so wie auch Ökonomen und Beamte durch Kenntniß der Geometrie zu ihrem eigenen großen Vortheile und zum Nutzen ihrer Mitbürger auszeichnen, während andere aus Unbekanntschaft mit derselben, nur Stümper bleiben, und sich in den gemeinsten Fällen nicht zu helfen wissen.

Diese Wissenschaft nun, welche auf die Geschicklichkeit und Würde, auf den Gewinn und das

Vermögen der ganzen gesund denkenden Menschheit so viel Einfluß hat, ist nichts weniger, als schwer. Heil uns! daß wir nicht in jenem dunklen Zeitalter leben, in welchem dieser Gegenstand bloß in lateinischer Sprache abgehandelt wurde, und wo Niemand so glücklich war, an dem Werthe desselben Theil nehmen zu können, als Jene, deren Ältern kein Bedenken trugen, ihre Kinder vorher sechs oder sieben Jahre Latein lernen zu lassen.

Freyherr von Wolf*) leistete daher der Menschheit unstreitig einen sehr wesentlichen Dienst

*) Christian Freyh. v. Wolf ward 1679 zu Breslau geboren. Sein Vater, ein Handwerker, wendete alles an, um seinem Sohne eine gute Erziehung zu geben. Wolf erhielt den ersten Unterricht auf dem Gymnasium zu Breslau, und ging, als er 20 Jahre alt war, nach Jena, wo er sich ganz vorzüglich mit Mathematik und Philosophie beschäftigte. Schon im J. 1703 hielt er zu Leipzig mathematische und philosophische Vorlesungen, die häufig besucht wurden. Im J. 1707 wurde er als Professor der Mathematik und Naturlehre auf die Universität der preußischen Stadt Halle gerufen. Hier erwarb er sich großen Ruhm; aber auch — große Feinde, die es durch ihre schwarzen Verleumdungen so weit brachten, daß Wolf (1723) seiner Stelle entsetzt, und ihm unter Androhung harter Strafe befohlen wurde, Halle in 24 Stunden, und in zwey Tagen die preußischen Staaten zu verlassen. Er fand im Auslande günstige Aufnahme und ehrenvolle Anstellung. Auch in seinem Vaterlande ereigneten sich günstige Umstände für

dadurch, daß er die Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften deutsch herausgab.

§. 4. Liebe Schüler! Ich möchte Euch recht gerne mit den Nahmen der berühmtesten Mathematiker, mit ihren Erfindungen und mit ihren Schicksalen bekannt machen; allein, wenn ich Euch sage, daß die Menschen schon vor 4000 Jahren mathematische Kentnisse besitzen mußten, weil schon damahls so große Werke der Baukunst in Ägypten, Babylon &c. ausgeführt wurden, und daß schon damahls die alten Ägyptier mit der practischen Geometrie nicht ganz unbekannt seyn mußten, weil sie die Gränzen ihrer Felder wieder herzustellen wußten, wenn solche durch die Überschwemmungen des Nil's unkenntlich geworden waren: so werdet Ihr wohl von selbst auf den Gedanken gerathen, daß das Verzeichniß berühmter Mathematiker von jenen Zeiten bis auf den heutigen Tag ziemlich stark werden müsse.

Da es aber Raum und Zeit nicht gestatten, mich darüber auszudehnen, so will ich hier bloß die Biographie des Archimedes ganz kurz an-

---

ihn. Und im J. 1740 ging er als Geheimrath, Vice-Kanzler der Universität und Professor des Natur- und Völkerrechts wieder nach Halle zurück, wo er 1743 zum ersten Kanzler, und 1745 in den Freyherrnstand erhoben wurde. — Er starb 1754, im 76sten Jahre seines Alters.

führen, welche ich vorzüglich darum gewählt habe, weil Ihr daraus die Größe dieses würdigen Mannes und seiner Wissenschaft deutlich erkennen werdet.

Dieser berühmte Archimedes, aus der Stadt Syrakus in Sicilien um 287 vor Christo gebürtig, war der erste, welcher den Kreis berechnet hat. Er beschäftigte sich auch besonders mit der Mechanik, und brachte mittelst des Hebels ein Schiff seines Königs Hiero zu Lande durch seine alleinige Handanlegung fort. »Gebt mir einen Standpunct außer der Erde, und ich bewege diese,« rief er dem erstaunten König zu. Als der römische Feldherr Marcellus Syrakus belagerte, erdachte Archimedes Maschinen, welche den Angriff aufhielten, und die Belagerer zwangen, sich zurück zu ziehen. Auch soll er die römischen Schiffe durch Brennspiegel in bedeutender Ferne angezündet haben. Als den Römern der Sturm auf Syrakus endlich gelang, saß Archimedes in mathematischen Betrachtungen vertieft, und zeichnete Figuren in den Sand; ein römischer Soldat redete ihn an; Archimedes antwortete: »Störe meine Kreise nicht,« und der erzürnte Krieger stieß ihn nieder. Marcellus hatte befohlen, ihn zu schonen, und beklagte seinen Tod sehr; er verlieh daher Archimedes Anverwandten viele Vorrechte, und ließ ihn feyerlich bestatten. Auf sein Grab ward, wie Archimedes selbst angeordnet hatte, eine Kugel und ein Cylinder gesetzt, zum Andenken, daß er das Verhältniß beyder Körper gefunden. Cicero suchte dieses Grabmahl auf, und fand es ganz vergessen und unter Gesträuch versteckt.

Noch einiger anderen Gelehrten dieses Faches wird gelegentlich erwähnt werden. Nun zur Sache!!

I. Abschnitt.

Vorbereitende Geometrie.

Einleitung.

Die Geometrie beschäftigt sich mit allen dem, was einen Raum einnimmt, was also entweder groß oder klein ist, d. h. eine Ausdehnung hat.

Jede Ausdehnung wird in der Geometrie Größe genannt.

Nun aber kann man sich sowohl eine Größe vorstellen, die sich nach allen Richtungen hin in's Unendliche ausdehnt, als auch einen Gegenstand, der nach gar keiner Seite hin eine Ausdehnung hat. Da dieser Gegenstand der einfachste ist, der sich denken läßt, so wollen wir mit ihm den Anfang machen. Er heißt Punct. 1.

Ein Punct ist also etwas, was keine Theile hat. Was aber keine Theile hat, ist nicht sichtbar. Da jedoch der Geometer die Stelle wissen muß, wo er sich den mathematischen Punct zu denken hat, so bedient man sich eines sehr kleinen Körperchens, eines Tüpfchens, das diese Stelle andeuten soll.

Mithin ist also ein geometrischer Punct bloß denkbar, und zwar immer in der Mitte des mit Bleystift oder Kreide gemachten Tupfens, den man zum Unterschiede vom geometrischen Puncte den körperlichen oder physikalischen zu nennen pflegt.

Auf dem Felde bezeichnet man Puncte mit Pflöcken, Stäben u. dgl. Bey der Aufnahme einer
1. ganzen Gegend werden Puncte auch durch Bäume, Thürme, Berge u. dgl. dargestellt.

Unter Meß- oder Absteckstäben versteht man gerade, cylindrisch geformte, gewöhnlich 6′ lange Stäbe von festem Holze, am unteren Ende mit zugespitzten Eisen beschlagen, und am obern bisweilen mit Fähnchen von farbigem Zeuge versehen, damit sie in größeren Entfernungen auf dem Felde um so leichter aufgefunden werden können. — Die Meßpflöcke sind ähnlich gestaltete, nur weit kürzere Stäbe, welche dasjenige auf dem Felde bedeuten, was die Puncte auf dem Papiere vorstellen; weßhalb sie gewöhnlich mit Buchstaben oder Ziffern bezeichnet sind.

Bewegt sich nun ein Punct von einem Orte
2. zum anderen, so entsteht eine einfache Ausdehnung in die Länge, ein Raum, der von zwey Puncten begränzt ist, und Linie heißt.

Die Entstehung einer Linie können wir uns z. B. durch die Bewegung eines Wagenrades versinnlichen, welches, auf weichem oder staubigem Boden fortgerollt, sichtbare Spuren seiner Bewegung in dem Geleise zurück läßt. Man berücksichtiget hierbey weder die Breite, noch die Tiefe des Geleises, sondern bloß seine Länge; gleichwie ein Reisender, um die Entfernung einer Stadt von der andern zu bestimmen, nicht auf die Breite der Straße, sondern bloß auf ihre Länge achtet.

Eine Linie nun, bey der man nur die Ausdehnung in die Länge in Betrachtung zieht, und sich alle Breite und Dicke gänzlich wegdenkt, ist eine geometrische Linie.

Und ein Strich mit dem Bleystift auf das Papier, oder mit der Kreide auf die Tafel gemacht, ist eine körperliche oder physikalische Linie, welche bloß die Stelle andeutet, wo die geometrische gedacht werden soll.

Da man sich die geometrische Linie ohne alle Breite und Dicke, und den geometrischen Punct ohne alle Ausdehnung denken muß; so ist es nothwendig, bey allen geometrischen Arbeiten die Puncte und Linien möglichst fein darzustellen, um sich den geometrischen, welche gleichsam in der vollkommensten Mitte derselben liegen, möglichst zu nähern.

Auf dem Felde werden Linien durch Gräben oder Streifen u. dgl. bezeichnet.

So wie durch die Bewegung eines Punctes von einem Orte zum andern eine Linie entsteht; so kann durch die Bewegung einer Linie nach einer andern Richtung, als sie schon hat, eine Fläche
3. entstehen. So z. B., wenn sich (Fig. 3.) die Linie a b nicht nach c, sondern etwa nach d e bewegt.

Die Entstehung einer Fläche kann man sich durch
III. die Bewegung einer Gartenwalze (Fig. III.) auf weichem Boden vorstellen, wenn man annimmt, daß die unterste Linie der Gartenwalze a b nach und nach den Raum a b c d kenntlich machen wird.

Da eine Linie an sich selbst keine Dicke hat, so kann auch die aus ihrer Bewegung entstehende Fläche ebenfalls keine Dicke haben. Betrachtet man z. B. einen Acker, oder eine Wiese, oder einen Weingarten, einen Wald, oder den Platz, worauf ein Gebäude erbaut werden soll, so bemerkt man an diesen Gegenständen wohl eine Länge und Breite, aber keine Dicke.

Mithin hat wohl eine Fläche eine doppelte Ausdehnung, da zu ihrer Ausdehnung in die Länge nun noch die zweyte nach der Breite hinzukommt; aber keine dreyfache.

Diese ist nur den Körpern eigen, und entsteht, wenn sich eine Fläche nach einer andern Richtung, als nach derjenigen bewegt, welche ihre Länge und Breite darstellt. Denn auf diese Weise kommt zu den zwey Hauptrichtungen der geometrischen Fläche noch eine dritte von ihnen verschiedene, wodurch ein geometrischer Körper erzeugt wird.

Die Entstehung der verschiedenen geometrischen Ausdehnungen kann man sich recht deutlich an einem Würfel vorstellen. (Fig. 4.) Die Länge a b 4.
entstand durch die Bewegung des Punctes a nach b; die Breite a c, oder die Fläche a b c d durch die Bewegung der Linie a b nach c d, und die Dicke durch die Bewegung der Fläche a b c d nach e f g h.

Diese letzte Ausdehnung kann man sich auch noch versinnlichen durch das Eintauchen eines Bretchens in eine weiche Materie, z. B. in Butter, Lehm ꝛc., wodurch nach und nach ein leerer Raum entsteht, der nicht nur die zweyfache Ausdehnung des Bretchens in die Länge und Breite, sondern auch noch die dritte in die Tiefe hat.

Um also die Größe eines Körpers, z. B. eines Steinblockes, anzugeben, ist es nicht genug, bloß zu bestimmen, wie lang und wie breit er ist, sondern es muß auch noch gesagt werden, wie dick oder wie hoch derselbe ist.

An dem genannten Würfel läßt sich auch noch deutlich sehen, daß die Gränzen einer Linie Puncte, die einer Fläche Linien, und die eines Körpers Flächen sind. Denn das Äußerste an der Linie a b sind die Puncte a und b; das Äußerste an der

Fläche abcd sind die Linien ab, bd, dc und ca, und das Äußerste des ganzen Körpers machen die Flächen abcd, acfe, fehg, bdhg, cdeg und abfh.

I. Von Linien.

§. 1. Erklärung. Linien sind entweder gerade
oder krumm. Eine gerade Linie ist eine sol=
5. che, deren Theile alle in einer und derselben Rich=
tung liegen, und sie entsteht, wenn ein Punct
während seiner Bewegung von der einmahl ange=
nommenen Richtung nicht abweicht.

§. 2. Eine krumme Linie ist eine solche,
wovon kein Theil gerade ist, und sie entsteht,
6. wenn ein Punct in jeder allerkleinsten Fortbewe=
gung von der vorigen Richtung abweicht.

7. §. 3. Die Natur der geraden Linien führt auf
folgende Grundsätze:

1. Zwischen zwey Puncten kann nur eine einzige gerade, aber eine Menge krummer Linien gezogen werden.

Anmerkung. Auf den Satz, daß zwischen zwey bestimmten Puncten nur eine gerade Linie möglich ist, gründet sich der Gebrauch des Zirkels; indem die Spitzen der Zirkelfüße zwey bestimmte Puncte darstellen.

2. Eine gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwey Puncten; jede krumme aber ist ein längerer Weg.

3. Zwey gerade Linien können sich nicht mehr als einmahl schneiden; krumme Linien aber zwey und mehrmahl.

4. Zwey gerade Linien decken sich in ihrer ganzen Länge, wenn ihre Endpuncte in einander fallen.

§. 4. Diesen Grundsätzen schließen sich folgende leicht verständliche Forderungen an:

1. Durch zwey gegebene Puncte eine gerade Linie zu ziehen.

2. Eine gerade Linie nach Belieben zu verlängern.

3. Eine gerade Linie einer gegebenen gleich zu machen.

4. Eine gerade Linie von einer größeren wegzunehmen.

Um auf dem Papiere gerade Linien zu ziehen, bedient man sich des Lineals, von dem voraus gesetzt wird, daß es richtig sey.

Ob die Schneide eines Lineals gerade sey, läßt sich erkennen, wenn es zwischen zwey bestimmten Puncten, man mag es von dieser oder von jener Seite an dieselben anlegen, nur eine und dieselbe Linie gibt.

Auf Holz oder Stein ꝛc. werden gerade Linien mittelst einer mit Kreide oder Farbe bestrichenen angespannten Schnur bezeichnet, indem man dieselbe auf den betreffenden Gegenstand ausschnellt.

Um in einem Garten geradlinige Wege oder Beete zu machen, bedient man sich ebenfalls einer ausgespannten Schnur.

Zuweilen bezeichnet man gerade Linien auch durch eine schmale und seichte Vertiefung im Boden, welche man durch Aufritzen mit einer eisernen Spitze bewirken kann.

Um auf dem Felde sehr lange gerade Linien bestimmen zu können, so nimmt man zwey Meßstäbe, wovon der eine den Anfang, und der andere das Ende der Linie bezeichnet.

Man kann auch drey, ja tausend Stäbe in eine gerade Linie bringen, wenn man bey Einsteckung eines dritten und aller folgenden mit dem Auge (gleich der Vorstellung IV.) so abzielet, daß der Stab, den man eben in der Hand hat, alle vorher eingesteckten ganz bedecke. So kann man durch Stäbe, so weit man will, auf dem Felde gerade Linien abstecken. Plato, ein berühmter Mathematiker, sagt von der geraden Linie: »Der erste und letzte Punct einer geraden Linie, sie sey, so lang sie wolle, muß alle übrigen Theile bedecken.« Daher sieht man auch, wenn hundert Stäbe auf dem Felde in gerader Linie ausgesteckt sind, daß der erste oder letzte, je nachdem man von diesem oder jenem mit dem Auge das Absehen nach allen übrigen nimmt, alle anderen verdecke.

Dieses Absehen nennt man auch Visieren, und geschieht in einiger Entfernung hinter dem Stabe a so, daß man z. B. bey geschlossenem linken Auge mit dem rechten längs der rechten Seite dieses Stabes nach jenem in b hinblickt. Befindet sich nun der mittlere Stab in c, so müssen die Puncte a, c und b in gerader Linie a c b liegen.

Anmerkung. Die Stäbe müssen vertical (lothrecht), d. h. in der Richtung eines beschwerten Fadens, eingesteckt werden; sie dürfen sich also nach keiner Gegend hinneigen.

Um die Stäbe ohne Senkbley (d. i. ein frey an einem Faden hängendes Gewicht) vertical einstecken zu können, muß man recht gerade stehen, die Füße an einander halten, den untern Theil des Stabes zwischen die Spitzen der Schuhe, und den oberen Theil desselben gerade vor die Nase bringen. Auf diese Art wird der Stab gehörig gestellt seyn.

§. 5. Erklärung. Steht eine gerade Linie auf einer andern so, daß sie sich nach der einen Seite 9.
nicht mehr, als nach der andern hinneigt, so heißt sie senkrecht.

§. 6. Schief ist eine gerade Linie, wenn sie auf einer andern so steht, daß sie sich nach der einen 10.
Seite mehr, als nach der andern hinneigt.

§. 7. Wagrecht sind jene geraden Linien, 9.
auf welchen eine andere senkrecht steht.

11. §. 8. Zwey gerade Linien, wie a b und c d,
von welchen immer die eine zur Seite der anderen
liegt, werden neben einander liegende
Linien genannt.

§. 9. Wenn nun zwey neben einander liegende
12. Linien, wie e f und g h, eine solche Lage gegen
einander haben, daß sie sich, wie immer verlän=
gert, niemahls durchschneiden, so werden sie gleich=
laufende oder parallele Linien genannt.

§. 10. Wenn sich aber gerade Linien, wie i k
und l m, in ihrer Verlängerung über i und l
13. schneiden, so heißen sie zusammenlaufende
oder convergirende Linien; hingegen aus=
einanderlaufend oder divergirend, wenn
sie in ihrer Verlängerung, z. B. über k und m,
immer weiter aus einander gehen.

Zwey Menschen, wie z. B. zwey Läufer, die einen gleichen Weg mit einander machen, und dabey immer in gleicher Entfernung neben einander bleiben, beschreiben parallele Linien.

Mehrere Menschen, welche von einem und demselben Stadtthore durch verschiedene Alleen in die Vorstädte gehen, beschreiben divergirende Linien; gehen sie in den nähmlichen Alleen wieder zurück, convergirende Linien.

§. 11. Wenn man in einer Fläche nach allen Richtungen gerade Linien ziehen kann, so heißt sie eine ebene Fläche, oder eine Ebene.

§. 12. In einer krummen Fläche kann entweder gar keine gerade Linie gezogen werden, wie z. B. auf der Oberfläche einer Kugel; oder wohl nach einer oder der andern Richtung, aber nicht nach allen, wie z. B. auf der Oberfläche einer Walze, eines Trinkglases u. dgl.

Demnach kann man z. B. untersuchen, ob irgend eine Tischplatte eben sey, wenn darauf ein geprüftes Lineal mit seiner Schneide nach verschiedenen Richtungen so aufgelegt werden kann, daß es mit der Fläche des Tisches immer genau zusammenpaßt, und also nirgends einen Zwischenraum bildet.

II. Von Winkeln.

§. 13. Zwey gerade Linien a b und a c, die
in einer Ebene liegen, und in einem Puncte a zu-
sammen stoßen, bilden einen Winkel. Die gera- 14.
den Linien heißen die Schenkel; und der Punct,
wo sie zusammen stoßen, Spitze oder Scheitel
des Winkels.

§. 14. Man pflegt einen Winkel entweder mit drey Buchstaben, von denen der mittlere die Spitze bezeichnet, oder auch mit einem an die Spitze oder in die Öffnung geschriebenen Buchstaben auszudrucken. Man sagt z. B. der Winkel c a b, oder der Winkel a, oder auch der Winkel x.

§. 15. Die Verlängerung der Schenkel verändert ihre Öffnung bey der Spitze nicht, daher wird

auch ein Winkel durch das Verlängern oder Ver-
kürzen seiner Schenkel weder größer noch kleiner;
15. sondern ein Winkel wird größer, wenn sich seine
Schenkel mehr öffnen, und kleiner, wenn sich diese
mehr schließen.

Denn stellt man sich vor, daß anfänglich beyde Schenkel in einander liegen, und daß sich, indem der erste unverrückt liegen bleibt, der andere um den einen Endpunct drehe, so sieht man deutlich, daß sogleich ein Winkel entstehe, der immer größer wird, je weiter die Drehung fortgesetzt wird.

§. 16. Gleichwie gerade Linien von einerley Größe einander decken, so werden auch Winkel von einerley Größe sich gegenseitig decken.

Um dieses einzusehen, denke man sich den Win-
kel a b c so in den Winkel d e f gelegt, daß die
Spitze b in den Scheitelpunct e, und der Schen-
16. kel b a längs des Schenkels e d falle. Fällt nun
der Schenkel b c auch längs des Schenkels e f,
so sagt man, daß die beyden Winkel c b a und
f e d einander decken.

§. 17. Grundsatz. Winkel, die einander decken, sind gleich groß.

Zusatz. Würden die zwey Winkel a c b und
f e d so in einander gelegt, daß die Spitze c in
die Scheitel e, und der Schenkel c b längs des
Schenkels e d fiele, und der andere Schenkel c a
17. fiele nicht in e f, sondern in e g, so wäre der

Winkel a b c kleiner, als der Winkel f e d, weil jener nur einen Theil von diesem betrüge. Der Winkel f e d hingegen wäre der größere, da sein Schenkel e f außerhalb des Schenkels c a fiele.

§. 18. Wenn man den einen Schenkel eines Winkels über die Spitze hinaus verlängert, so entstehen zwey Winkel, die einen Schenkel gemeinschaftlich haben, 18. und deren beyde andere Schenkel in einer geraden Linie liegen; und diese Winkel heißen Nebenwinkel, wie a e b und b c d.

§. 19. Steht der gemeinschaftliche Schenkel b c so, daß die Nebenwinkel zu beyden Seiten desselben einander gleich sind, so steht er senkrecht 19. auf a d; und jeder der beyden Nebenwinkel heißt dann ein rechter Winkel.

§. 20. Ein Winkel, wie x, der größer ist, als ein rechter, heißt ein stumpfer Winkel; und ein Winkel, wie m, der kleiner ist, als ein 20. rechter, heißt ein spitziger Winkel.

Zusatz. Bildet man sich ein, daß ein Winkel so groß werde, daß sein zweyter Schenkel mit dem ersten in einer geraden Linie liege, so wäre dieß wohl der möglichst größte Winkel. Daß dieß aber eigentlich kein Winkel ist, ist klar. Und dennoch pflegen einige Geometer diese Lage zweyer geraden Linien einen gestreckten Winkel zu nennen, und das nicht ohne Grund. Daß auch ich davon nicht bloß zum Zeitvertreibe davon Erwähnung mache, wird die Folge lehren.

§. 21. Spitzige und stumpfe Winkel heißt man auch überhaupt schiefe Winkel; und die Linie c d, welche sie macht, heißt schief auf a d.

§. 22. Winkel, wie a c b und b c d haben zwar ebenfalls den Schenkel c b gemeinschaftlich; allein, sie sind doch keine Nebenwinkel, weil die
21. zwey andern Schenkel c a und c d nicht eine einzige gerade Linie, sondern einen Winkel a c d bilden. Solche Winkel pflegt man benachbarte Winkel zu nennen.

§. 23. Wenn man beyde Schenkel eines Winkels über die Spitze hinaus verlängert, so entstehen vier Winkel, wovon die, welche einander ge-
22. gen über liegen, Scheitel- oder Vertical-Winkel heißen. Das eine Paar ist x und y, das andere Paar p und q.

Wo Scheitelwinkel sind, da kommen auch Nebenwinkel vor, und zwar vier Paar. Diese mag jeder Schüler selbst sich aufsuchen.

§. 24. Wenn zwey neben einander liegende gerade Linien von einer dritten geraden geschnitten werden, so entstehen hierdurch verschiedene Win-
3. kel, welche verschiedene Nahmen erhalten. So nennt man z. B. die beyden Winkel g und c, so wie auch die beyden andern h und i, innere Winkel.

Innere Winkel sind also jene, welche

auf einerley Seite der Durchschnittslinie, und zwischen den beyden geschnittenen Linien liegen.

§. 25. Den Winkel k nennt man den äußeren, und den Winkel c den zu ihm gehörigen inneren Winkel.

Unter äußeren und inneren Winkeln versteht man daher jene, welche auf einerley Seite der Durchschnittslinie so liegen, daß der eine sich zwischen den durchschnittenen Linien, und der andere aber außer denselben sich befindet, ohne daß sie Nebenwinkel mit einander machen.

§. 26. Die beyden Winkel g und i, oder h und c, nennt man Wechselwinkel.

Wechselwinkel sind also jene, welche auf entgegen gesetzten Seiten der Durchschnittslinie, und inner den neben einander liegenden Linien so liegen, daß keiner ein Nebenwinkel des andern ist.

Zusatz. Es kommen also bey zwey neben einander liegenden geraden Linien, welche von einer dritten geschnitten werden,

1. zwey Paar innere Winkel,
2. vier Paar äußere und innere, und
3. zwey Paar Wechselwinkel vor.

Denkende Schüler werden sie sogleich bey der hier (Fig. 24.) gezeichneten Vorstellung anzugeben wissen. 24.

III. Von Dreyecken.

§. 27. *Erklärungen.* Wenn ein Flächenraum rings umher von Linien begränzt ist, so nennt man ihn *Figur*. Ist die begränzte Fläche eine Ebene, so heißt sie *ebene Figur*. Die Linien, welche die Figur bilden, heißen die Seiten derselben, und machen zusammen genommen den *Umfang* oder *Perimeter* derselben aus.

§. 28. Sind die Seiten einer Figur gerade
25. Linien, so ist sie eine *geradlinige Figur*.
Da zwey gerade Linien noch keinen Raum einschließen können, so sind zur Bildung einer Figur wenigstens drey nöthig. Und Figuren, von drey Seiten eingeschlossen, heißen *Dreyecke*, wie a b c.

§. 29. Betrachtet man ein Dreyeck, so sieht
man sogleich, daß sich in ihm *drey Seiten*,
26. nähmlich d e, e f und f d; *drey Winkel*,
nähmlich x, m und n, und ein *bestimmter Flächenraum* D befinden.

§. 30. Jeder Seite liegt ein Winkel, und jedem Winkel eine Seite gegen über. Jedes Paar Seiten schließt einen Winkel ein, und an jeder Seite befinden sich zwey Winkel.

So liegt der Seite a c der Winkel x, der Seite c b der Winkel m, und der Seite a b der Win-
27. kel o gegen über. Der von den Seiten a c und
c b eingeschlossene Winkel heißt o, der von c b

und b a eingeschlossene Winkel heißt x, und der von b a und a c eingeschlossene Winkel heißt m. An der Seite a c liegen die Winkel m und o; welche Winkel liegen an der Seite b c? und welche an der Seite a b?

§. 31. In einem Dreyecke kann was immer für eine Seite zur Grundlinie oder Basis angenommen werden. Die Höhe desselben ist dann jene senkrechte, welche von der Spitze aus auf die Grundlinie oder ihre Verlängerung gefällt ist.

Nimmt man z. B. in dem Dreyecke a c b die 28.
Seite a c als Grundlinie an, so ist b d seine Höhe. In dem Dreyecke f g h ist h i die Höhe, wenn f g seine Grundlinie ist.

§. 32. Dreyecke, welche gleiche Grundlinien haben, nennt man Dreyecke von einerley
Grundlinie, wie k m o und k r o; Dreyecke, 29.
welche gleiche Höhen haben, nennt man Dreyecke von einerley Höhe, wie m o p und
m o x, und Dreyecke, welche ungleiche Grundlinien 30.
und ungleiche Höhen haben, nennt man Dreyecke von verschiedenen Grundlinien und Höhen, wie m o x und p n x.

§. 33. In Hinsicht auf die Größe der Seiten sind die Dreyecke entweder gleichseitig, wenn
alle Seiten sich gleich sind, wie a b c; oder gleich- 31.
schenkelig, wenn nur zwey Seiten einander gleich sind, wie d e f, worin d f und f e einan-

der gleich sind; oder ungleichseitig, wie g h m, in welchen die drey Seiten einander ungleich sind.

§. 34. Im gleichschenkeligen Dreyecke nennt man jene Seite, welche den beyden andern ungleich
32. ist, seine Grundlinie, nähmlich a b, und folglich den ihr gegen über liegenden Scheitelpunct c die Spitze. Die Winkel a und b werden die Winkel an der Grundlinie genannt.

§. 35. In Hinsicht auf die Größe der Winkel sind die Dreyecke entweder rechtwinkelige, wenn darin ein rechter Winkel ist; oder stumpfwinkelige, wenn darin ein stumpfer Winkel ist; und spitzwinkelige Dreyecke, wenn darin alle Winkel spitze Winkel sind.

Das Dreyeck A ist ein rechtwinkeliges Dreyeck, weil darin der rechte Winkel r ist; das Dreyeck B
33. ein stumpfwinkeliges Dreyeck, weil darin der stumpfe Winkel s ist; und warum nennt man das Dreyeck C ein spitzwinkeliges?

§. 36. Im rechtwinkeligen Dreyecke heißen die beyden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, die Katheten, und diejenige Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, die Hypothenuse.

34. Also sind a b und a c die beyden Katheten, und c b die Hypothenuse.

IV. Von der Congruenz, Gleichheit und Ähnlichkeit der Dreyecke.

§. 37. Wenn zwey Dreyecke so in einander gelegt werden können, daß ihre Gränzen genau auf einander passen, so sagt man, diese **Dreyecke decken sich**, oder sie **sind congruent**. Solche Dreyecke sind nicht nur in ihrer Größe, sondern auch in ihrer Gestalt vollkommen übereinstimmend.

§. 38. Wenn aber zwey Dreyecke zwar einerley Größe, d. i. einerley Flächenraum, aber verschiedene Gestalten haben, so werden sie **gleiche Dreyecke** genannt.

Denkt man sich z. B., daß sich ein rechtwinkeliges Dreyeck, wie a b c, um seine größere Kathete a c so lange herum drehe, bis der Punct b in den Punct d fällt, so entsteht das Dreyeck b a d, welches noch einmahl so groß als a b c ist. Würde sich aber das nähmliche Dreyeck a b c um die kleinere Kathete b c bewegen, so lange, bis der Punct a in den Punct e fiele, so entstände
das Dreyeck a e b, welches ebenfalls doppelt so 35.
groß wäre, als das Dreyeck a b c. Folglich hätten demnach die beyden Dreyecke b a d und a e b einerley Flächenraum; mithin haben sie einerley Größe, obschon ihre Gestalten sehr verschieden

sind; denn a b d ist ein spitzwinkeliges, und c b a ein stumpfwinkeliges Dreyeck.

§. 39. Wenn in zwey Dreyecken immer zwey Seiten des einen mit zwey Seiten des andern eine Proportion ausmachen, so sagt man, sie seyen einander ähnlich. Solche Dreyecke haben wohl einerley Gestalt, aber verschiedene Größe. So
36. stimmen z. B. Dreyecke A B C und a b c in Ansehung ihrer Gestalt überein; aber daß das erste weit größer als das zweyte sey, ist außer allen Zweifel. Und daß diese zwey Dreyecke nach der gegebenen Erklärung ähnliche Dreyecke seyen, ist auch klar.

Denn AB : BC = ab : bc;
nähmlich 6 : 8 = 3 : 4
24
24

und BC : CA = bc : ca;
nähmlich 8 : 10 = 4 : 5
40
40

und CA : AB = ca : ab;
nähmlich 10 : 6 = 5 : 3
30
30

§. 40. Wenn man eine Seite eines Dreyeckes über die Spitze hinaus verlängert, so entsteht außerhalb des Dreyeckes ein Winkel, den man

Außenwinkel am Dreyecke nennt. Jene beyden Winkel im Dreyecke, wovon keiner sein Nebenwinkel ist, heißen die beyden inneren ihm entgegenstehenden Winkel. So ist z. B. m ein Außenwinkel, und die Winkel o und x sind die beyden inneren ihm entgegenstehenden Winkel.

V. Von Vierecken.

§. 41. Ein von vier Seiten eingeschlossener 38.
Raum wird Viereck genannt, wie a b c d.

Es ist klar, daß in jedem Vierecke jeder Seite wieder eine Seite, und jedem Winkel wieder ein Winkel gegenüber liege.

§. 42. Zu den geradlinigen Vierecken gehören:

1. Das Quadrat, das ist ein Viereck, wor-
in vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel sind, 39.
wie a b c d.

2. Das Rechteck, das ist jenes Viereck, welches vier rechte Winkel hat, und worin die gegenüber liegenden Seiten einander gleich sind; wie e f g h.

3. Die Raute oder der Rhombus, ein Viereck, worin vier gleiche Seiten und zwey Paar von gegenüber liegenden gleichen Winkeln sich befinden, wovon das eine Paar spitzige, und das andere Paar stumpfe Winkel sind; wie i k l m.

4. Das Rhomboides, ein Viereck, in welchem sowohl die gegenüber stehenden Seiten, als

auch die gegenüber stehenden Winkel einander gleich sind; die Winkel sind schief. (n o p q.)

40. 5. Das Parallel=Trapez, ein Viereck, worin zwey gegenüber liegende Seiten mit einander parallel aber ungleich sind; wie r s t u.

6. Das Trapez ist ein Viereck ohne alle Parallel=Seiten; wie v w x y.

§. 43. Zusatz. Die vier ersten Vierecke, nähmlich: das Quadrat, das Rechteck, die Raute und das Rhomboides führen auch den gemeinschaftlichen Nahmen Parallelogramm, das sind vierseitige Figuren mit gegenüber stehenden Parallel=Seiten.

§. 44. Eine beliebige Seite des Parallelogramms kann zur Grundlinie angenommen werden. Die Höhe ist dann die gerade Linie, welche
41. von irgend einem Puncte der Gegenseite auf die Grundlinie senkrecht gezogen wird. Wenn z. B. a b als Grundlinie angenommen ist, so ist e b die Höhe des Parallelogramms.

§. 45. Man kann in jedem Vierecke aus dem einen Winkel desselben bis zum gegenüber stehenden Winkel eine gerade Linie c b ziehen, welche
42. das Viereck in zwey Dreyecke theilt, die zusammen genommen dem Vierecke gleich sind. Eine solche Linie nennt man Diagonal=Linie.

§. 46. So wie Dreyecke, deren Gränzen genau auf einander passen, congruent sind, so sind es auch Vierecke. Können also zwey Vierecke so in einander gelegt werden, daß sie nur ein einziges Viereck bilden, so werden sie congruente Vierecke genannt.

§. 47. Gleich können sich Vierecke seyn, ohne daß sie congruent sind. Hierbey kommt es nähmlich bloß darauf an, daß beyde Vierecke einerley Größe ihrer Flächenräume haben. Dieß läßt sich an der 43. Figur deutlich sehen. Wenn sich z. B. das 43.
Dreyeck a b c um die feste Linie a c so herum bewegt, daß b in d fällt, so entsteht das Viereck b a d c, welches dem doppelten Dreyecke a b c gleich ist. Legt man aber ein dem Dreyecke a b c gleiches Dreyeck e f g mit der Seite e f so an b c, daß der Punct g nach h fällt, so entsteht ebenfalls ein Viereck a b h c, welches dem doppelten Dreyecke a b c gleich ist. Folglich haben die Vierecke a b c d und a b h c einerley Flächenraum; also sind sie einander gleich, obschon sie verschiedene Gestalt haben.

§. 48. Zwey Vierecke, welche zwar verschiedene Größen, aber einerley Gestalt haben, werden ähnliche Vierecke genannt. Folglich kann nur ein Quadrat dem andern, eine Raute der andern, aber nicht ein Rechteck einem Trapez, ein Rhombus einem Rhomboides ꝛc. ähnlich seyn.

VI. Von den Vielecken.

§. 49. Flächen, welche von mehr als vier Seiten eingeschlossen sind, werden überhaupt Vielecke genannt. Hat eine solche Figur fünf Seiten, so ist sie ein Fünfeck, hat sie sechs Seiten, ein Sechseck u. s. w.

§. 50. Sind in einem Vielecke alle Seiten und alle Winkel sich gleich, so wird es ein reguläres Vieleck oder ein Polygon genannt.

§. 51. Die Betrachtung eines Vieleckes zeigt, daß es eben so viele Winkel als Seiten habe, und einen gewissen Flächenraum einnehme.

Auch kann man sich leicht überzeugen, daß in Vielecken von einer ungeraden Seitenanzahl, wie z. B. in einem Fünfecke, in einem Siebenecke 2c., jeder Seite ein Winkel, und umgekehrt, jedem Winkel eine Seite gegenüber liege. In Vielecken von einer geraden Seitenanzahl, wie z. B. in einem Sechsecke oder Achtecke, liegt jeder Seite wieder eine Seite, und jedem Winkel wieder ein Winkel gegenüber.

44. So liegt z. B. in dem Fünfecke a b c d e der Seite d c der Winkel a, der Seite c b der Winkel e, dem Winkel d die Seite a b gegenüber u. s. w. In dem Sechsecke f g h i k l liegt der Seite k i die Seite f g, dem Winkel h der Winkel l, und so immer einer Seite eine Seite, und einem Winkel ein Winkel gegenüber.

§. 52. Jedes Vieleck kann von einem Scheitelpuncte aus durch Diagonalen in Dreyecke getheilt werden. Und zwar: Das Fünfeck in drey, das Sechseck in vier, das Siebeneck in fünf ꝛc. Z. B. das Fünfeck abcde von dem Puncte a aus durch die Diagonalen ac und ad in die drey Dreyecke 44.
abc, ace, ced, und das Sechseck fghikl von dem Puncte l durch die Diagonalen lg, lh und li in die vier Dreyecke lfg, lgh, lhi und lik.

§. 53. Jedes Polygon hat einen Mittelpunct, welcher von den Scheitelpuncten gleichweit absteht.

So ist z. B. in dem regelmäßigen Sechsecke
abcdef der Punct o der Mittelpunct, um wel- 45
chen, wenn man von ihm nach den Scheitelpuncten hin gerade Linien zieht, sechs Winkel herum liegen, die man Mittelpuncts- oder Centri-Winkel nennt; jeden der Winkel abc, bcd, cde, def, efa und fab aber heißt man Vielecks- oder Polygons-Winkel.

Daß jedes Polygon von dem Mittelpuncte aus in eben so viele congruente Dreyecke getheilt werden könne, als es Seiten hat, ist von selbst klar.

VII. Von dem Kreise.

§. 54. Drehet sich in einer und derselben Ebene
eine gerade Linie ca um ihren unbeweglichen End- 46.

punct c so lange herum, bis sie wieder ihre vorige Lage einnimmt, so wird der Punct a eine in sich selbst zurück führende krumme Linie beschreiben, deren jeder Punct von dem unbeweglichen Puncte c gleich weit entfernt ist. Die eingeschlossene Ebene heißt ein Kreis oder Zirkel; der Punct c der Mittelpunct oder das Centrum, und die krumme Linie, welche die Zirkelfläche einschließt, der Umkreis oder die Peripherie. Jeder Theil des Umkreises, wie z. B. a e, e y, wird ein Bogen; jede Gerade zwischen zwey Puncten des Umkreises, wie f g, eine Sehne oder Chorde; jede Sehne, welche durch den Mittelpunct geht, wie d e, ein Durchmesser oder Diameter; jede Gerade von einem Puncte des Umkreises bis zum Mittelpuncte, wie a c und e c, ein Halbmesser oder Radius, und jede gerade Linie außerhalb des Kreises, welche den Umkreis in einem Puncte berührt, wie i m, eine Tangente genannt.

§. 55. Die Hälfte der Kreislinie, oder die Hälfte der Kreisfläche, wie d a e, nennt man einen Halbkreis; den vierten Theil der Kreislinie, oder auch der Kreisfläche, wie d c a oder
47. a c e, einen Quadranten; jedes Stück der Kreisfläche zwischen einer Sehne und dem ihr zugehörigen Bogen, wie a m e, einen Abschnitt oder ein Segment, und endlich jedes von zwey

Halbmessern und dem dazwischen liegenden Bogen begränzte Stück der Kreisfläche, wie **bcf**, einen Ausschnitt oder Sector.

§. 56. Es ist klar, daß alle Halbmesser sowohl, als auch alle Durchmesser eines und desselben Kreises einander gleich sind; ferner, daß gleiche Sehnen gleiche Bogen abschneiden; und endlich, daß jeder Durchmesser die Kreislinie sowohl, als auch die Kreisfläche in zwey gleiche Theile zertheile.

Biegt man z. B. einen aus Papier geschnittenen Kreis in einem Durchmesser, so lassen sich die beyden Stücke so genau auf einander legen, daß sie sich gänzlich decken.

§. 57. Um auf dem Papiere einen Kreis zu beschreiben, bedient man sich eines Werkzeuges, das man Zirkel nennt, dessen einen Fuß man einsetzt, den andern aber herum führt.

Auf dem Felde, oder im Garten, um etwa ein kreisrundes Beet, oder ein Rondell zu machen, wird in dem Mittelpuncte ein Pflock eingeschlagen, und um denselben eine Schnur in gleicher Länge und Spannung frey herum gedreht; an dem äußern Ende der Schnur kann ein eiserner Nagel befestiget werden, mit welchem man bey der Umdrehung die Erde aufschärft.

Ist ein Kreisbogen, oder auch ein ganzer Kreis von sehr beträchtlich großem Halbmesser zu

führen, so bestimme man so viele Puncte der
Peripherie, als es nur immer nöthig ist. Und
dieses geschieht, wenn man aus dem gegebenen
V. Mittelpuncte c nach verschiedenen Richtungen ge-
rade Linien in der Länge des gegebenen Halb-
messers aussteckt. Die erhaltenen Puncte a, m,
o, n etc. werden in der zurückführenden Kreis-
linie liegen.

§. 58. Erklärungen. Zwey oder mehrere
Kreise von verschiedener Größe, welche alle einen
gemeinschaftlichen Mittelpunct haben, heißen con-
48. centrische Kreise; hat aber von zwey oder
mehreren Kreisen, die in einander liegen, jeder
seinen eigenen Mittelpunct, so heißen sie excen-
49. trische Kreise.

§. 59. Da nun von den Linien im Kreise gesprochen wurde, so muß auch der Winkel in demselben erwähnt werden, welche entweder Centri-Winkel oder Peripherie-Winkel heißen, je nachdem sie ihre Spitze in dem Mittelpuncte des Kreises, oder in dem Umfange desselben liegen haben; erstere heißt man auch Mittelpuncts-Winkel, und letztere Umfangs-Winkel. Von diesen Winkeln ist noch zu merken, daß die Centri-Winkel zu ihren Schenkeln zwey Halbmesser, und die Peripherie-Winkel dazu zwey Sehnen haben.

So sieht man z. B. an der 50. Figur, daß der Centri-Winkel a c b von den zwey Halbmessern a c und c b, und daß der Peripherie-Winkel a d b von den zwey Sehnen a d und d b gebildet wird.

VIII. Vom Maße und vom Messen der Linien.

§. 60. Um zu messen, muß ich zwey Größen haben; nähmlich eine, welche gemessen werden soll, und eine, womit ich die andere messen kann.

§. 61. Die Größe, womit eine Sache gemessen werden soll, heißt das Maß, und dieses muß mit dem zu messenden Gegenstande von einerley Art seyn. Daher kann eine Linie nur wieder mit Linien, eine Fläche nur wieder mit Flächen, und ein Körper nur wieder mit Körpern gemessen werden.

§. 62. Zur Linien-Messung bedarf man also einer geraden Linie von bekannter Größe, und diese ist meistens von Theilen des menschlichen Körpers hergenommen. So mißt man z. B. nach Daumbreiten (Zollen), Handbreiten, Spannen, Ellen (Länge eines Armes), Klaftern (Länge der beyden ausgespannten Arme), Schritten u. s. w.

Da aber nicht alle Menschen gleich groß sind, so ist es nothwendig, eine allgemein bekannte Größe als Maßstab anzunehmen. Man würde ja sonst nicht im Stande seyn, andere über die Größe abwesender Gegenstände zu belehren! Jemand sagete z. B. zu mir: Der Thurm der Domkirche ist dreyhundertmahl so hoch, als mein Stock. Wollte ich dieß nun meinem Freunde wieder erzählen, so müßte ich mir entweder ein Maß des Stockes mitnehmen, oder alle Leute müßten gleich große Stöcke haben. Das Erste ist unbequem, und das Andere finden wir nicht, weil es wieder große und kleine Menschen gibt.

Aus eben demselben Grunde würden wir uns auch nicht immer vor Nachtheil sichern können. Würde z. B. der Zeug, die Leinwand, das Tuch ꝛc. nicht nach einem allgemein bekannten Maße, sondern bloß nach der Länge des Armes gemessen, so würde man bey einem kleineren Handelsmanne weniger Ware als bey einem größeren erhalten.

§. 63. Wir sehen hieraus, daß das Maß, womit die unbekannte Größe gemessen werden soll, bekannt seyn müsse. Daher sagen wir:

Messen heißt untersuchen, wie oft eine bekannte Größe in einer unbekannten enthalten ist.

§. 64. Die allgemein angenommene Einheit für die Messung der Linien ist der Fuß oder Schuh.

Hierbey hat man zweyerley Eintheilungen zu merken; nähmlich das zwölftheilige Maß, oder die Duodecimal-Eintheilung, wenn der Schuh in 12 gleiche Theile (Zolle), und das zehntheilige Maß, oder die Decimal-Eintheilung, wenn der Fuß in 10 gleiche Theile abgetheilt ist.

Eben so wird der Duodecimal-Zoll in 12 Linien, und die Linie in 12 Scrupel, der Decimal-Zoll aber in 10 Linien, und die Linie in 10 Scrupel oder Puncte getheilt.

Eine Länge von 12, oder von 10 Fuß, je nachdem die Duodecimal- oder bloß die Decimal-Eintheilung dabey zum Grunde liegt, heißt eine Ruthe.

§. 65. Ruthen bezeichnet man mit einem kleinen Ringe, welchen man oben hin zur Rechten der Zahl setzt; Schuhe mit einem Strichlein, Zolle mit zweyen, und Linien mit dreyen. Wie wird demnach die nachfolgende Angabe zu lesen seyn? $5^{\circ}\ 4'\ 7''\ 8'''$.

§. 66. Im gemeinen Leben, bey den Arbeiten der Handwerker, wie z. B. Zimmerleute, Tischler u. s. w., ist das zwölftheilige Maß gebräuchlich; weßhalb man dieses auch den Werkschuh nennt. Auch pflegt man den Zoll nicht immer in Linien und Puncte, sondern oft nur in halbe, Viertel- und Achtelzolle einzutheilen, weil dieß zu solchen Arbeiten genau genug ist. Eben so pflegt man z. B. die Länge einer Mauer oder Planke, die Höhe eines Thurmes 2c. nicht immer nach

Ruthen, sondern nach Klaftern, das sind halbe Ruthen, zu bestimmen.

§. 67. Die Geometer bedienen sich wegen der großen Bequemlichkeit für das Reduciren und Resolviren lieber des Decimal-Maßes, welches daher das geometrische Maß genannt wird.

Bey dieser Eintheilung braucht man eigentlich keine Berechnung anzustellen, um z. B. Ruthen auf Schuhe, Zolle rc., oder umgekehrt, um Zolle auf Schuhe und Ruthen zu bringen; denn 875″ kann man gleich als 8° 7′ 5″ lesen, und umgekehrt 5° 6′ 9″ 5‴ kann man als 5695‴ lesen.

Bey dem Duodecimal-Maße aber müßte man, um z. B. 5° 6′ 9″ 5‴ auf lauter Linien zu bringen, die Anzahl von Ruthen mit 12 multipliciren, dazu 6 addiren, die Summe wieder mit 12 multipliciren, und dazu 9 addiren, und diese Summe endlich wieder mit 12 multipliciren, und zum Producte 5 addiren. Und umgekehrt, um z. B. 9475‴ auf Zolle, Schuhe und Ruthen zu reduciren, müßte man diese Zahl zuerst mit 12 dividiren, um Zolle zu erhalten; der Rest aber bedeutet Linien. Den Quotienten müßte man nochmahl mit 12 dividiren, um Schuhe und den Rest von Zollen zu erhalten. Die Anzahl der Schuhe endlich müßte man wieder mit 12 dividiren, um die Ruthen und den Rest von Schuhen zu erhalten.

§. 68. Verwandlungen eines Maßes in das andere erfordern nur eine leichte Anwendung der Regel de Tri. Die Ruthe wird in beyden Fällen gleich lang angenommen. Einige Beyspiele werden hierüber sogleich Aufschluß geben.

1. Der Stephans-Thurm hat eine Höhe von 432' nach dem Duodecimal-Maße; wie viel Fuß beträgt dieß nach der Decimal-Eintheilung?

Antwort. Die Duodecimal-Ruthe hat 12' und die Decimal-Ruthe 10'; da aber beyde Ruthen gleich lang sind, so müssen 10 Decimal-Fuß eben so lang seyn als 12 Duodecimal-Fuß. Folglich rechne ich nach der Regel de Tri:

Duod.'	Dec.'	Duod.'	Dec.'
12	: 10	= 432	: X

4320 = 360, und somit zeigt sich, daß 432 Duod.' 360 Dec.' geben.

2. Ein Knabe las in einer Reisebeschreibung, daß der Erlaph-See an einigen Stellen eine Tiefe von 465 Fuß geometrischen Maßes habe; er fragte seinen älteren Bruder, wie viel Klafter das im bürgerlichen Maße betrage. Dieser berechnete es, und fand, daß es 93° seyen.

Nun sollen denkende Schüler angeben, wie das berechnet werden konnte?

IX. Werkzeuge zum Messen gerader Linien.

§. 69. Die gewöhnlichsten Werkzeuge, womit wir Linien messen, sind: der Zirkel, der Zollstab, das Klaftermaß, die Ruthe, die Meßkette oder die Meßschnur.

§. 70. Das Messen gerader Linien auf dem Papiere ist höchst einfach. Man setzt nähmlich den einen Fuß des Zirkels in dem Anfange der Linie ein, und eröffnet dann den Zirkel, bis er das Ende der Linie erreicht. Mit dieser Eröffnung untersucht man nun auf dem Maßstabe, wie viel Theile desselben zwischen den Zirkelspitzen liegen.

Die Handwerker, Künstler ꝛc. bedienen sich des so genannten Zollstabes, welcher gewöhnlich nur 3 Fuß lang ist, und der Bequemlichkeit wegen von 6 zu 6'' gebogen und zusammen gelegt werden kann.

§. 71. Die gewöhnlichsten Maßstäbe zum Messen nicht gar langer Linien auf dem Felde sind das Klaftermaß und die Meßruthe.

Das Klaftermaß ist 6' und die Meßruthe 12' lang. Beyde Maßstäbe sind in Schuh und Zoll eingetheilte, und zuweilen mit Öhlfarbe bestrichene Stangen von wohl ausgetrocknetem Holze, und an beyden Enden mit Metall beschlagen.

Zuweilen gebraucht man auch zwey solcher Stangen, und dann geht das Messen sehr schnell. Man legt die eine derselben auf die Linie a b, von a gegen b, und hält sie so lange daran, bis die zweyte Stange an die erste angelegt ist, und so wechselt man immer fort bis zum Ende der zu messenden Linie. IV.

Ist man mit einem Beyläufig zufrieden, so kann eine Linie auch bloß durch das Umschlagen des Klaftermaßes gemessen werden.

Auch kann dieses Ausmessen bloß mit Schritten geschehen. Nur ist es dazu erforderlich, daß man sich einen gleichförmigen Schritt angewöhne. Bey unserem Militär ist es vorgeschrieben, die Schritte so einzurichten, daß fünf einer Ruthe oder zwey Klaftern gleich seyen.

§. 72. Um auf dem Felde sehr lange Linien zu messen, bedient man sich der Meßkette nebst zehn eisernen Nägeln. Die Meßkette ist aus starkem Eisendrahte gemacht, und in 10 Klafter, jede Klafter gewöhnlich in 12 Gelenke, deren jedes 1 Schuh lang ist, eingetheilt. Die Klaftern sind durch größere, und die Schuhe durch kleinere Ringe zusammen gehängt. An jedem Ende der Kette befindet sich entweder ein großer Ring als Handhabe, oder eine Hülse, welche genau über den Nagelkopf paßt; und die ganze Kette kann zusammen gelegt und an einem Reife bequem nachgetragen werden.

Soll nun mittelst der Kette die gerade Linie
VI. A B auf dem Felde gemessen werden, so verfährt man auf folgende Art: Da ein Feldmesser den Anfang der Kette an den Punct a fest anhält, so legt ein Gehülfe das Ende der Kette, nachdem er diese scharf angezogen hat, und von a nach b gerichtet worden ist, nieder, und steckt in diesen Punct einen der 10 Nägel ein; sodann zieht er die Kette gegen B weiter, bis ihr Anfang an den Nagel c kommt, woran die Kette wieder fest angehalten wird, bis der zweyte Nagel d in der Geraden A B eingesteckt ist. Und so fährt man fort, bis man das Ende der Linie erreicht hat. Der nachgehende Messer zieht immer jeden Nagel aus, sobald ein neuer eingesteckt ist, und so oft er alle 10 Nägel beysammen hat, merkt er 100° an, und gibt die Nägel wieder an den Gehülfen ab.

Da die Meßkette ihres Gewichtes wegen zuweilen unbequem ist, so bedient man sich, besonders bey kleinen Vermessungen, lieber einer 5 oder 10° langen Schnur von gleicher Eintheilung mit der Meßkette.

X. Vom Maße und vom Messen der Winkel.

§. 73. Zum Maße der Winkel dient der Kreisumfang, welcher von den Geometern in 360 gleiche

Theile getheilt ist, welche man **Grade** nennt. Nach dieser Theilung bekommt der Halbkreis 180, und der Viertelkreis oder Quadrant 90 Grad. Jeder Grad wird in 60 Minuten, und jede Minute in 60 Secunden abgetheilt.

Übrigens gibt uns die Anzahl Grade eines Bogens noch nicht dessen wirkliche Länge, sondern nur dessen Verhältniß zum ganzen Umkreise an. Unter dem Ausdrucke: »Der Bogen ab hat 50,
60 Grade,« wird verstanden, daß derselbe 60 gleiche Theile habe, deren 360 den ganzen Umfang ausmachen; folglich, daß derselbe der sechste Theil des Umkreises sey.

§. 74. Man bezeichnet die Grade mit °, die Minuten mit ′, die Secunden mit ″ 2c. So lieset man 30° 5′ 4″ als 30 Grad, 5 Minuten und 4 Secunden.

§. 75. Bildet man sich nun ein, daß aus der Spitze eines Winkels zwischen die Schenkel desselben ein Kreisbogen ab beschrieben sey; so wird die Anzahl der Grade dieses Bogens das Maß des Winkels acb seyn; weil dieser Bogen mit der größeren oder kleineren Öffnung der Schenkel zugleich wächst oder abnimmt. Es ist daher ein Winkel von 60° nichts anderes, als eine solche Öffnung zweyer Geraden, die einen aus der Spitze beschriebenen Bogen von 60° abschneiden.

§. 76. Es folgt aus diesem, daß man auf
51. einer Geraden a c aus dem Puncte c einen Winkel verzeichnen könne, der einem gegebenen Winkel A C B gleich ist, wenn man aus dem Puncte C mit einer beliebigen Eröffnung C D zwischen die Schenkel des Winkels einen Bogen E D beschreibet; dann mit der nähmlichen Eröffnung D C aus dem Puncte c einen Bogen d e von unbestimmter Länge führt, ferner die Sehne D E aus dem Puncte d auf den beschriebenen Bogen d e aufträgt, und endlich von dem Puncte c durch den Punct e eine Gerade c b führt.

XI. Werkzeuge zur Winkelmessung.

§. 77. Um einen Winkel zu messen, d. h. seine Größe in Graden bestimmen, bedient man sich des so genannten Transporteurs; das ist ein gewöhnlich aus Messing verfertigter Halbkreis, welcher in 180° eingetheilt ist. Legt man nun den Mittelpunct dieses Instrumentes auf die Spitze eines Winkels, so kann man sehen, wie viel Grade zwischen beyden Schenkeln des zu messenden Winkels enthalten sind. So hat z. B. der Winkel
52. e a b 50, der Winkel d a b 90, und der Winkel b a c 140°.

§. 78. Vermittelst dieses Instrumentes kann man auch einen in Graden gegebenen Winkel auf das Papier tragen. Soll z. B. auf die Linie a b ein Winkel von 45° aufgetragen werden, so nehme ich den Transporteur, und lege ihn so an die Linie a b, daß sein Mittelpunct den Punct a treffe, und sein Durchmesser in die Lage von b a falle.

Nun zähle ich von der Linie a b angefangen bis zum 45. Grad, bezeichne diese Stelle auf dem Papiere mit einem Puncte c, nehme dann den Transporteur weg, und ziehe die Linie a c, und der Winkel c a b wird 45° haben.

§. 79. Von den Instrumenten, welche zur Messung der Winkel auf dem Felde dienen, wollen wir nur die einfachsten und gebräuchlichsten kennen lernen. Diese sind:

1. Der Meßtisch und 2. das Astrolabium.

§. 80. Der Meßtisch besteht aus drey Haupttheilen, aus dem Gestelle, aus der Verschiebung und aus dem eigentlichen Tischchen. VII.

Das Gestell hat drey Füße, welche an einem runden, etwa 10″ im Durchmesser haltenden Brete so beweglich sind, daß dadurch das Bretchen höher oder tiefer gestellt werden kann.

Die Verschiebung ist so beschaffen, daß man mittelst derselben das Tischchen nicht nur horizontal drehen, sondern auch schief und vertical stellen, und in jeder Lage durch Stellschrauben befestigen kann.

Das Tischchen selbst ist eine viereckige, meistens quadratische, sehr wohl geebnete hölzerne Tafel, ungefähr 18 bis 20″ lang und breit, worauf das Papier gespannt wird, um die verschiedenen Linien und Winkel darauf verzeichnen zu können.

§. 81. Zum Meßtische gehören noch die Setzwage, die Meßgabel und das Diopter-Lineal.

VIII. §. 82. Die Setzwage oder Libelle ist eine mit Weingeist so angefüllte cylindrische Glasröhre, daß noch eine Luftblase zurück bleibt, die sich natürlich immer nach dem höchsten Puncte der Röhre hinbegibt, und dadurch anzeigt, ob alle Puncte gleich hoch, d. i. in einer Horizontal-Ebene liegen oder nicht. Dieser Eigenschaft wegen verwendet man sie zum Horizontalstellen des Meßtisches, welches man daran erkennt, daß sich die Luftblase, man mag das Instrument hinstellen, wie man will, immer in der Mitte der Röhre zeige.

IX. §. 83. Die Meßgabel oder die Zange mit dem Lothe besteht aus zwey starken, vierkantigen Stäben, die mit einander unter einem Winkel von 45° dergestalt verbunden sind, daß die Puncte a und b, wenn der Haken c a in eine horizontale Lage gebracht wird, eine verticale Linie bilden. Man gebraucht dieses Instrument, um einen Punct auf dem Meßtische vertical über einen Punct auf dem Felde zu stellen.

X. §. 84. Das Diopter-Lineal gebraucht man, um von einem Puncte auf dem Felde nach einem entfernten Gegenstande zu visiren, und auf dem Tischchen eine Linie zu ziehen, welche der Linie auf dem Felde entspricht. Um diese Arbeit verrichten zu können, sind in dem Lineale zwey dünne Metallplatten in einiger Entfernung von einander senkrecht aufgestellt. In der einen Platte (dem Augeoder Ocular-Diopter) befindet sich ein feiner langer Spalt, oder eine abwärts laufende Reihe feiner Löcher, an deren eines man das Auge legt; in der andern Platte (dem Objectiv-Diopter) ist eine längliche, oben und unten abgerundete Öffnung angebracht, in deren Mitte gewöhnlich ein Haar gespannt wird. Beym Gebrauche richtet man das Lineal so lange, bis das Auge den entfernten Gegenstand durch das Objectiv-Diopter erblickt, und der Faden denselben scharf schneidet.

§. 85. Will man nun einen auf dem Felde zu messenden Winkel auch gleich auf das Papier zeichnen, so nehme man hierzu den Meßtisch, und stelle denselben zuerst über die Spitze des Winkels nach dem Augenmaße wagrecht, lasse dann, um recht genau zu verfahren, ein Senkbley vermittelst der Meßgabel auf die Spitze des Winkels herab, und stelle den Meßtisch, mit Hülfe einer Setzwage oder Billard-Kugel, genau horizontal. Über den Punct des Senkbleyes stecke man eine Nadel in den Tisch, und lege daran das Visier-Lineal. Dieses richte man nach dem Gegenstande B, und ziehe XI.

auf dem Tischchen an dem Lineale eine Linie bis an die Nadel. Sodann richte man das Visier = Lineal nach dem Gegenstande C, und ziehe an eben derselben Seite des Lineals abermahls eine Linie bis an die Nadel. Und siehe, cab ist dann der verlangte Winkel.

XII. §. 86. Das Astrolabium ist ein großer Transporteur, in dessen Mittelpunct ein bewegliches Lineal, mit Dioptern versehen, befestiget ist. Dieses Instrument wird auf einem dreyfüßigen Gestelle aufgestellt. Visiert man nun zuerst durch die Diopter des Durchmessers nach dem ersten, und sodann durch die Diopter des beweglichen Lineals nach dem zweyten Gegenstande, so bezeichnet die Anzahl der Grade zwischen den Visier = Linien die Größe des von ihnen eingeschlossenen Winkels, welcher seine Spitze in dem Standpuncte des Astrolabiums liegen hat.

XIII. Der kleine Feldmesser hier weiset uns mittelst seines Instrumentes den Winkel in Graden, welchen die zwey Visier-Linien, wovon die eine die Richtung nach der Säule, und die andere die Richtung nach dem bey dem kleinen Dörfchen stehenden Kreuze bezeichnet, von seinem Standpuncte aus bilden.

Anmerkung. Ein solches Instrument kann man sich im Nothfalle selbst verfertigen. Und da dieß besonders Schülern, welche Winkel auf dem Felde mittelst des Astrolabiums zu messen, bloß lernen sollen, und sich ein so kostspieliges Instrument auch nicht anschaffen können, vorzüglich nützlich seyn würde, so dürfte eine kurze Anleitung, wie man sich dasselbe für ein Paar Kreuzer herstellen kann, nicht überflüssig seyn.

Man zeichne nähmlich auf Regalpapier einen XIV.
Transporteur, dessen Durchmesser etwa 8″ lang ist. Diese Zeichnung leime man auf starken Pappendeckel. Sodann mache man sich ein Lineal, ebenfalls von gutem Pappendeckel, und ziehe darauf durch die Mitte der Länge nach eine gerade Linie, theile sie in zwey gleiche Theile, und bezeichne den Theilungspunct. Durch diesen und den Mittelpunct des Transporteurs stecke man eine Nadel, damit man das Lineal herum drehen kann. Den äußern Theil des Lineals schneide man bis zur Mittellinie aus, damit die Breite desselben die Grade nicht bedecke.

Mit diesem bloß papierenen Instrumente versehen, können wir im Nothfalle Winkel auf dem Felde messen. Dort suchen wir uns einen Zaun oder Rebstecken, welcher uns als Gestell dienen muß, schlagen ihn da in die Erde, wo die Spitze des Winkels hinfällt. Auf dem Instrumente selbst stecken wir sowohl bey a und b, als auch auf dem Lineale bey f und e, und zwar genau auf der Mittellinie, Stecknadeln (anstatt der Diopter) ver-

tical ein. Nun befestige man dasselbe mittelst einer starken Stecknadel, welche durch den Mittelpunct des Lineals und des Transporteurs geschlagen wird, auf dem Rebstocke dergestalt, daß man sowohl den Transporteur, als auch das Lineal nach Belieben
XV. umwenden kann. Zuerst richte man den Durchmesser des Transporteurs gerade auf den einen Gegenstand, z. B. auf den Berg A; dann wende man das Lineal nach dem zweyten Gegenstande, dem Thurme hin, ohne jedoch das ganze Instrument zu verrücken. Nun zähle man die angeschriebenen Grade zwischen a und f, und der Winkel auf dem Felde ist gemessen.

XVI. §. 87. Will man sich bloß der Stäbe und der Kette bedienen, um z. B. an das Ende b einer auf dem Felde gegebenen Geraden ab einen Winkel zu tragen, der einem ebenfalls auf dem Felde gegebenen Winkel cad gleich ist, so befestige man in der Spitze des gegebenen Winkels eine Schnur von bestimmter Länge, z. B. von 5°, beschreibe mit derselben in gleicher Länge und Spannung zwischen die Schenkel einen Bogen, und messe seine Sehne. Nun hat man die Schnur in dem gegebenen Punete b fest zu machen, sie gegen a hin anzuspannen, und damit einen Bogen in die Erde einzuritzen. Wird dann eine Schnur von der Länge der gemessenen Sehne dc in e fest gemacht, und der Punct f bestimmt: so wird der Winkel fbe dem Winkel dac gleich seyn.

Denn beyde Winkel werden von gleichen Bogen bespannt, weil diese von gleichen Sehnen abgeschnitten sind.

§. 88. Da wir nun zur beweisenden Geometrie übergehen, so ist es nothwendig, die Zeichen kennen zu lernen, welche zur Erleichterung und Abkürzung des geometrischen Vortrages eingeführt sind. Diese sind außer den arithmetischen, welche jeder Schüler der IV. Classe längst kennen muß, folgende:

1. Das Zeichen der Gleichheit (=);
2. das Zeichen der Ähnlichkeit (∽);
3. das Zeichen der Congruenz (≌);
4. das Zeichen des Winkels (<);
5. der Buchstabe R, welcher immer einen rechten Winkel bedeutet;
6. das Zeichen des Parallelismus (╪);
7. das Zeichen des Dreyeckes (△).

---

§. 89. Zum Schlusse der vorbereitenden Geometrie, und zum Eingange der beweisenden sollen nun folgende allgemeine Grundsätze dienen:

1. Jede Größe ist sich selbst gleich.
2. Alle Theile zusammen genommen sind so groß, als das Ganze.
3. Ein oder einige Theile des Ganzen zusammen genommen sind kleiner, als das Ganze.

4. Wenn jede von zwey Größen der nähmlichen dritten Größe gleich ist, so sind auch jene beyden Größen einander selbst gleich.

5. Wenn gleiche Größen zu gleichen Größen addirt werden, so entstehen auch gleiche Summen hieraus.

6. Wenn man von gleichen Größen gleiche hinweg nimmt, so bleiben auch gleiche Unterschiede.

7. Wenn zwey Größen einer dritten gleich sind, so müssen auch ihre doppelten, dreyfachen, vierfachen, und überhaupt alle gleich vielfachen Größen einander gleich seyn.

II. Abschnitt.

Beweisende Geometrie.

I. Von Winkeln.

§. 90. Lehrsatz. Es ist sehr klar, daß die zwey Nebenwinkel a c e und e c d zusammen genommen eben so groß sind, als a c b und b c d zusammen genommen. Überhaupt also sind zwey Nebenwinkel immer so groß, wie zwey Rechte.

54. Beweis. Denn die Winkel a c e und e c d haben so, wie die Winkel a c b und b c d zusammen genommen, die halbe Kreislinie, d. i. 180°, also so viel, als 2 R, zu ihrem Maße.

Der Satz: »Zwey Nebenwinkel sind zusammen immer gleich zweyen Rechten,« kann auch noch auf folgende Art bewiesen werden:

Durch i kann i c auf a d senkrecht gesetzt wer- 55.
den; alsdann ist

$$< aic + < cid = 2 R,$$

also auch $< aim + < mic + < cid = 2 R,$

oder $aim + mid = 2 R.$

Man sieht hier recht deutlich, daß der stumpfe $<$ mid um eben denselben $<$ mic größer ist, als ein rechter, um welchen der spitzige $<$ mia kleiner als 1 R ist.

Anwendung. Demnach ist es leicht, die Größe eines von zwey Nebenwinkeln zu erfahren, ohne ihn messen zu können. Man zieht nähmlich den bekannten Nebenwinkel von 2 R ab; so erhält man den andern Nebenwinkel.

Sollte daher ein Winkel gezeichnet werden, den z. B. die Ecke einer Planke oder einer Mauer
bildete, so braucht man nur eine Latte horizontal XVII.
an die eine Wand, z. B. an b c, zu legen; nun ist der $<$ dba bekannt, diesen von 180° abgezogen, gibt den $<$ abd.

§. 91. Von den Scheitelwinkeln läßt sich behaupten: Scheitelwinkel sind einander gleich.

56. Denn es ist $< x + < p = 2\,R$,

auch $< p + < y = 2\,R$ (4. Grunds.);

folglich $< x + < p = < p + < y$

folglich $< x = < y$ (6. Grunds.).

Oder: Da die halbe Kreislinie a b c der halben Kreislinie b c d gleich ist; so sind, wenn man den gemeinschaftlichen Theil b c wegnimmt, die übrigen Bögen a b und c d einander gleich.

Anwendung. Diesem Lehrsatze zufolge läßt sich der Winkel, den z. B. zwey Mauern mit einander machen, mittelst zweyer Latten sogleich ange-
XVIII. ben; denn es ist der $<$ a c b so groß als der $<$ d c e.

57. §. 92. Lehrsatz. Wenn zwey Gerade AB und CB, welche in B zusammen stossen, von einer dritten in D und F durchschnitten werden, so ist der äußere Winkel x größer als der innere $< y$.

Beweis. Dieß ist leicht einzusehen. Denn, wenn man den $< x$ mit seinem Schenkel F G an der durchschneidenden Linie G H bis zum Puncte D fortschiebt, so fällt der andere Schenkel F B in die Lage D E, und der dadurch entstandene Winkel G D E ist gleich dem Winkel x; der $< y$ aber ist nur ein Theil von dem Winkel F D E, also kleiner als dieser, und deßhalb auch kleiner als $< x$.

Hingegen an der Seite von D F, wo die Linien A B und C B aus einander gehen, ist der äußere $< q$ kleiner als der innere o.

§. 93. Kehrt man diese Sätze um, so lehren sie uns, daß zwey Linien an jener Seite sich schneiden müssen, wo der äußere Winkel größer als der innere ist; daß hingegen zwey Linien auf jener Seite immer weiter aus einander gehen müssen, wo der äußere Winkel kleiner als der innere ist.

Denn würde man im ersten Falle den zuvor bis zum Puncte D hinauf geschobenen Winkel x (= F D E) wieder an der Linie H G bis zum Puncte f zurück schieben, so würde der Schenkel D E sogleich den Schenkel D B des Winkels y schneiden.

§. 94. Hieraus läßt sich nun ein sehr wichtiger Satz, der so genannte Parallelismus einsehen und beweisen.

Nähmlich: Wenn zwey gerade in einerley Ebene liegende Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß der äußere Winkel seinem innern gleich ist; so können diese zwey Linien nirgends zusammen stossen, d. h. sie sind parallel.

Denn sollten sie irgendwo zusammen laufen, so müßte der äußere Winkel an derselben Seite größer als der innere seyn; und sollten sie auf einer Seite immer weiter auseinander laufen, so müßte der äußere Winkel auf dieser Seite kleiner seyn als der innere. Weil also der äußere Winkel dem innern gleich ist, und diese Linien daher weder rechts noch links zusammen, oder immer weiter auseinander laufen können, so müssen sie gleichlaufend, d. i. parallel seyn.

§. 95. Dieser Lehrsatz hat noch mehrere andere zur Folge. Nähmlich:

Daß Wechselwinkel einander gleich, und zwey innere Winkel zusammen 180° sind, wenn der äußere dem innern gleich ist.

58. Denn da $< x = < y$ ist,
dann $< x$ und $< n$ als Scheitelwinkel einander gleich sind, so muß auch $< n = < y$ seyn.

§. 96. Und eben so leicht läßt es sich einsehen, daß $< m + < y = 180°$ oder 2 R sind.

Denn $< x = < y$,
und $< x + < m$ sind als Nebenwinkel $= 180°$,
folglich auch $< m + < y = 180°$.

Mithin sind Linien nicht nur parallel, wenn

1. der innere Winkel dem äußern gleich ist,

sondern auch, wenn

2. die Wechselwinkel einander gleich sind, und
3. wenn die zwey innern Winkel zusammen 180° haben.

§. 97. Kehrt man diese Sätze um, so heißen sie:

Wenn zwey Parallel-Linien von einer dritten Geraden durchschnitten werden, so ist

1. der äußere Winkel seinem innern gleich,

es sind

2. die beyden Wechselwinkel einander gleich,

und es betragen

3. die beyden innern Winkel zusammen zwey rechte.

§. 98. Hieraus folgt, daß Parallel-Linien unter dreyerley Bedingungen entstehen können. Nähmlich:

1. Wenn der äußere Winkel seinem innern gleich gemacht wird, oder

2. wenn die beyden Wechselwinkel einander gleich gemacht werden, und

3. wenn die zwey innern Winkel zusammen genommen 180° erhalten.

§. 99. Diese Sätze geben uns die Mittel in die Hand, folgende Aufgaben zu lösen.

Eine Parallele durch einen außerhalb einer geraden Linie bestimmten Punct zu dieser zu ziehen.

Auflösung. Ist c d die gegebene Linie, 59.
und e der gegebene Punct, so ziehe man durch e eine beliebige gerade Linie h k, welche die gegebene in f schneidet, und mache entweder den innern Winkel x gleich dem Außenwinkel g;

oder mache den Winkel x = dem Wechselwinkel y;

oder mache den < x so groß, daß die beyden innern < x und q zusammen 2 R betragen.

Im letzten Falle muß man den Transporteur zu Hülfe nehmen.

§. 100. Auch kann diese Aufgabe durch das 60.61.
Verschieben eines Winkelhakens oder eines Dreyeckes an der Seite eines Lineals,

oder durch das Verschieben einer Reißschiene an dem Rande eines Reißbretes,

62. oder auch durch ein Parallel-Lineal bequem aufgelöset werden.

Anwendung. Soll man mit einer auf dem Felde gegebenen Geraden, z. B. mit einer Allee, oder einer Gartenmauer ꝛc. eine Parallele ausstecken, so kann dieses ebenfalls auf verschiedene Art geschehen.

XIX. Man steckt nähmlich eine schiefe Linie A B durch den gegebenen Punct B aus, und macht entweder $< n$ so groß, als $< o$; oder $< y$ so groß, als $< o$; oder auch vermittelst des Astrolabiums $< m$ so groß, daß er mit dem andern innern Winkel o 180° enthält.

§. 101. Nun können wir zum Beweise folgenden Lehrsatzes schreiten:

In jedem Dreyecke sind alle drey Winkel zusammen gleich zweyen Rechten, oder 180°.

63. Um dieses beweisen zu können, so ziehe man durch die Spitze des Dreyeckes eine Parallele mit der Grundlinie; so ist

$< x = < y$ (Wechselwinkel),

$< p = < p$ (1. Grundf.),

$< m = < n$ (Wechselwinkel);

folglich $x + p + m = y + p + n$ (5. Grundf.);

aber $< y + p + n = 2 R$;

folglich auch $< x + p + m = 2 R$.

§. 102. a) Wie groß wird daher $< m$ seyn, wenn $< x = 50^\circ$, und $< p = 85^\circ$ ist?

Auflösung. $50 + 85 = 135$

$$180 - 135 = \underline{45^\circ}$$

b) Wie groß ist $< p$, wenn $< m = x$, und $< m$ 65° hat?

Auflösung. $65 + 65 = 130$

$$180 - 130 = \underline{50^\circ}$$

c. Wie groß ist $< p$, wenn $p = x$, und m 70° hat?

Auflösung. $180 - 70 = 110 : 2 = \underline{55^\circ}$

d) Wie groß ist jeder der Winkel eines Dreyeckes, wenn $< x = p = m$?

$$180 : 3 = \underline{60^\circ}.$$

§. 103. Aus dem letzten Lehrsatze fließen noch folgende Zusätze:

In einem Dreyecke kann nur ein rechter, oder ein stumpfer Winkel seyn.

In jedem Dreyecke müssen also wenigstens zwey spitzige Winkel seyn.

Wenn in einem Dreyecke ein Winkel ein rechter ist, so sind die beyden übrigen spitzigen Winkel zusammen auch einem rechten gleich.

§. 104. Der folgende Lehrsatz:

Der durch die Verlängerung einer Dreyecksseite entstehende Außenwinkel ist so groß als die beyden innern ihm entgegengesetzten Winkel, von welchen keiner mit ihm einen Nebenwinkel ausmacht, läßt sich nun ebenfalls leicht einsehen:

64. Es muß also bewiesen werden,

daß $< x = < p + < n$ sey.

Da $< x + y = 180^\circ$ oder 2 R, und auch $p + n + y = 180^\circ$ oder 2 R sind;

so folgt, daß $x + y = p + n + y$ sey; nun von gleichen Größen gleiche weggenommen, so bleiben gleiche Reste;

also abgezogen $< y$,

folglich $x = p + n$.

§. 105. Wenn $< x = 120^\circ$,

und $< n = 70^\circ$ ist,

wie groß ist alsdann $< p$?

Auflösung. $180 - 120 = 60^\circ = < y$,

$60 + 70 = 130^\circ$

$180 - 130 = 50^\circ$

also $< p = 50^\circ$.

§. 106. Eben so leicht ist einzusehen, daß ein Winkel am Umfange des Kreises halb so groß ist, als ein Winkel am Mittelpuncte, der denselben Bogen bespannt.

Denn es ist $< x = < y + < p$,

aber es ist $p = y$;

folglich $x = 2\ y$.

Es sind aber drey Fälle möglich: Entweder liegt der Mittelpunct in dem einen Schenkel des

Peripherie-Winkels, oder zwischen beyden Schenkeln, oder außerhalb derselben.

Für den ersten Fall ist der Beweis so eben geführt worden. 66.

Beweis für den zweyten Fall:

$$\begin{array}{l} < BEF = 2\ BAF, \text{ und} \\ \text{eben so } < FEC = 2\ FAC; \\ \hline \text{folglich } BEC = 2\ BAC. \end{array}$$

Beweis für den dritten Fall:

Der Winkel x ist zweymahl so groß, als 67.
$< y$. Denn $< GEC = 2 < GDC$, und
$< GEB = 2 < GDB$.
Mithin $GEC - GEB = 2\,(GDC - GDB)$,
d. h. BEC (oder $< x$) $= 2\,BDC$ (oder $2 < y$).

§. 107. Hieraus läßt sich noch Folgendes herleiten:

Die Linien B C und C A, welche zusammen einen Durchmesser ausmachen, liegen in einer geraden Linie, man kann also sagen, sie machen in c einen (gestreckten) Winkel von 180° mit einander. 68.

Der Bogen, den sie bespannen, ist der Halbkreis B F A. Ein Winkel r also am Umfange, der auch den Halbkreis bespannt, ist halb so groß, als 180°, oder ist 90°, d. h. ein rechter Winkel.

§. 108. Diese Eigenheit führt uns auf eine neue Art, in dem Endespuncte e einer Geraden f e eine Senkrechte aufzurichten. 69.

Auflösung. Man nehme einen beliebigen Punct c über der gegebenen Linie, beschreibe aus demselben mit dem Halbmesser c e einen Kreis, der die gegebene Linie in a schneidet; ziehe durch a und c den Durchmesser a d, und ziehe d e. Diese ist senkrecht auf e f; denn es entsteht dadurch ein Winkel r, der den Halbkreis bespannt.

70. Aufgabe. Einen Winkelhaken zu prüfen.

Auflösung. Man zeichne einen Kreis, und am Umfange desselben einen Winkel, dessen beyde Schenkel einen Durchmesser a b bespannen; dieser ist, wie erst gesagt, ein rechter Winkel; und der Winkelhaken muß, wenn er richtig ist, genau in denselben hinein passen.

71. Ist das zu prüfende Instrument ein Winkelbret, so zeichne man nach seinen drey Kanten ein Dreyeck; theile die Hypothenuse in zwey gleiche Theile; in dem Theilungspuncte c setze man den Zirkel ein, eröffne ihn bis a oder b, und beschreibe damit einen Kreis. Soll das Winkelbret richtig seyn, so müssen die drey Puncte a, b und e in der geführten Kreislinie liegen.

Mit diesen wenigen Kenntnissen ausgerüstet, können wir nun zur Lehre von der Congruenz oder Deckung und Gleichheit der Dreyecke schreiten, wodurch uns ein weites Feld zu practischen Anwendungen offen steht.

II. Von Dreyecken.

§. 109. Grundsätze. 1. Wenn in zwey Dreyecken die drey Seiten des einen, einzeln genommen, den drey Seiten des andern gleich sind, oder:

2. wenn zwey Dreyecke zwey Seiten, einzeln genommen, und den dazwischen liegenden Winkel wechselweise gleich haben, oder:

3. wenn zwey Dreyecke eine Seite und die zwey daran liegenden Winkel, einzeln genommen, gleich haben; so können dieselben in jedem dieser Fälle so in einander gelegt werden, daß sie sich decken, d. h. sie sind congruente Dreyecke.

§. 110. Zusatz. Wenn also einer von diesen drey Sätzen Statt findet, so decken sich die Dreyecke, und gleichen Seiten stehen alsdann gleiche Winkel, und gleichen Winkeln stehen gleiche Seiten gegenüber.

§. 111. Im gleichseitigen Dreyecke sind also drey Winkel einander gleich, und jeder enthält daher 60°.

§. 112. Zusatz. Im gleichschenkeligen Dreyecke sind aber die den gleichen Seiten gegenüber liegenden Winkel, d. i. die Winkel an der Grundlinie, einander gleich.

§. 113. Zusatz. Wenn daher in einem gleichschenkeligen Dreyecke der Winkel, der zwischen den gleichen Schenkeln liegt, ein rechter Winkel ist, so ist jeder der beyden übrigen Winkel halb so groß, als ein rechter, nähmlich 45°.

Wie groß wird daher jeder der beyden Winkel an der Grundlinie eines andern gleichschenkeligen Dreyeckes seyn, wenn der zwischen den gleichen Schenkeln liegende Winkel 80° enthält?

§. 114. Zusatz. Aus den angeführten Grundsätzen geht die Folge hervor, daß zu Construirung oder Zeichnung eines Dreyeckes jedesmahl drey Stücke gegeben seyn müssen, und zwar:

1. entweder alle drey Seiten, oder

2. zwey Seiten und der dazwischen liegende Winkel, oder

3. eine Seite, und die zwey daran liegenden Winkel.

Folgende Aufgaben sind das Gefolge dieser wichtigen Sätze:

§. 115. Aus drey gegebenen Seiten ein Dreyeck zu zeichnen; oder, was fast dasselbe ist, ein Dreyeck zu zeichnen, das einem gegebenen Dreyecke
72. abc congruent ist.

Man mache ef = bc, mit dem Halbmesser ba beschreibe man aus e einen Bogen, mit dem Halbmesser ca beschreibe man aus f einen zweyten Bogen, welcher den ersten durchschneidet, und aus dem Durchschnittspuncte d ziehe man de und fd.

Auf diese Art wird man ein Dreyeck e d f erhalten, welches dem Dreyecke a b c congruent ist. Denn es ist e f = b c, e d = b a, und d f = a c.

§. 116. Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Man nehme auf beyden Schenkeln des Winkels gleiche Längen c a = c b; beschreibe aus a und b mit einerley Eröffnung des Zirkels Bogen, die sich in d schneiden, und ziehe die Linie c d; diese theilt den Winkel a c b in zwey gleiche Theile. 73.

Denn es ist c a = c b gemacht,
auch ist a d = b d gemacht,
und c d = c d;

folglich ist △ c a d = △ c b d, oder sie decken sich; folglich < x = < y.

Auf dem Felde befestige man die Ende einer in zwey gleiche Theile getheilten Schnur in den Puncten a und b, halte an die Mitte der gleichstark angespannten Schnur einen Pflock an, und bemerke damit den Punct d, so wird d c die theilende Gerade seyn. XX.

§. 117. Zusatz. Theilt man hierauf jeden halben Theil des Winkels wieder in zwey gleiche Theile, so wird dadurch derselbe in vier gleiche Theile eingetheilt, u. s. f.

§. 118. Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie a b zu halbiren. 74.

Man mache aus den Endpuncten der Linie mit gleichen Halbmessern Bogen über und unter der

Linie, die sich in c und e schneiden, und ziehe die Linie c e; diese theilt die gegebene Linie a b in zwey gleiche Theile a o und o b.

Denn es ist 1.) $ac = bc$ gemacht,
auch ist $ae = be$ gemacht,
und $ce = ce$;

folglich ist $\triangle ace = bce$, d. h. sie decken sich;
folglich $\angle x = \angle y$.

Es ist 2.) $ac = bc$ gemacht,
auch $\angle x = \angle y$ (bewiesen 1.),
und $co = co$;

folglich $\triangle aco = \triangle bco$ (decken sich);
folglich $ao = bo$, wie es seyn sollte.

Auf dem Felde hingegen wird eine gerade Linie in zwey gleiche Theile getheilt, wenn man die gerade Linie ausmißt, und sodann die Hälfte dieses Maßes von dem einen Endpuncte gegen die Mitte aufträgt.

§. 119. Zusatz. Theilt man jeden Theil a o und o b wieder in zwey gleiche Theile, so wird dadurch die Linie o b in vier gleiche Theile eingetheilt, ꝛc.

§. 120. Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie a b in einem auf ihr gegebenen Puncte d eine senkrechte Linie aufzurichten.

75. Auflösung. Man nehme auf beyden Seiten von d gleiche Längen, $da = db$; aus a und b

beschreibe man mit gleichen Halbmessern Bogen über der Linie, die sich in c schneiden; ziehe c d, diese ist senkrecht auf a b.

Denn es ist d a = d b gemacht,
auch ist a c = b c gemacht,
und c d = c d;

folglich △ a c d deckt △ b c d;

folglich ∠ p = ∠ q;

folglich d c senkrecht auf a b.

Auf dem Felde machet man ebenfalls d a XXI.
= d b, bemerket die Puncte a, d, b mit Pflöcken, befestiget in a und b die Ende einer Schnur; deren Mitte c ergreift man, und bringt sodann die zwey gleichen Theile a c und b c in eine solche Lage, daß sie beyde gerade ausgezogen und gleich stark gespannt sind. Steckt man sodann die Gerade c d aus, so wird sie in dem Puncte d auf a b senkrecht seyn.

§. 121. Aufgabe. Auf eine gegebene gerade Linie a b von einem außerhalb derselben gegebenen Puncte c eine Senkrechte zu fällen.

Aus c beschreibe man mit einerley Halbmesser
Bögen, welche die gegebene Linie in a und b 76.
schneiden; aus a und b wieder Bögen, die sich unter der Linie in e schneiden, und ziehe c e, so ist c d senkrecht auf a b.

Denn es ist 1. $ca = cb$ gemacht,
auch ist $ae = be$ gemacht,
und $ce = ce$;
folglich $\triangle\, cae \cong \triangle\, cbe$;
folglich $\angle x = \angle y$.
Es ist 2. $ca = cb$ gemacht,
auch $\angle x = \angle y$ (bewiesen 1.),
und $cd = cd$;
folglich $\triangle\, cad \cong \triangle\, cbd$;
folglich $\angle p = \angle q$;
folglich cd senkrecht auf ab.

XXII. Auf dem Felde können wir aus einem gegebenen Puncte e eine Senkrechte auf cd fällen, wenn wir durch Hülfe der Wechselwinkel die Lage der Parallelen ab bestimmen, und sodann in dem Puncte e die Senkrechte eh auf ab errichten. Denn die Linie eh wird auch auf cd senkrecht seyn, weil sie auf die Parallele ab senkrecht ist.

XXIII. Mittelst einer Schnur kann dieß geschehen, wenn man mit derselben $en = em$ nimmt, und die Gerade nm mißt; trägt man nun die Hälfte dieses Maßes von m gegen n auf, so erhält man den Punct h, und eh ist senkrecht auf cd.

Zur Errichtung senkrechter Linien auf dem Felde dient das Winkelkreuz oder der Kreuz-Diopter.

XXIV. Dieses Instrument besteht aus zwey mit Dioptern versehenen Linealen, welche rechtwinkelig auf einander befestiget sind.

Bringt man nähmlich das Winkelkreuz mit seinem Mittelpuncte über den gegebenen Punct c auf dem Felde, und richtet dabey das eine Lineal nach der gegebenen Geraden c a, so wird man in der Verlängerung des andern Lineals die Senkrechte c b oder c d sehr leicht bestimmen können. XXV.

§. 122. Aufgabe. Aus zwey gegebenen Seiten und einem Winkel, welcher dazwischen liegen soll, ein Dreyeck zu errichten.

Auflösung. Es sey z. B. die eine Seite 3″, die andere 4″ lang, und der dazwischen liegende Winkel 54°.

Man ziehe zuerst eine gerade 3″ lange Linie a b, trage dann an den Endpunct a der Linie a b, 77.
vermittelst des Transporteurs, den gegebenen Winkel von 54°, und mache den Schenkel a c 4″ lang. Verbindet man sodann die Puncte c und b durch eine gerade Linie c b, so ist a b c das verlangte Dreyeck.

Der Grundsatz: Zwey Dreyecke sind $\cong$, wenn sie zwey Seiten und den dazwischen liegenden $\angle =$ haben, weiset uns den Weg, wie auf dem Felde die Entfernung zweyer Gegenstände bestimmt werden könne, wenn dazwischen ein Hinderniß liegt.

Aufgabe. Es seyen z. B. auf dem Felde XXVI.
zwey Puncte A und B gegeben, deren Entfernung wegen eines dazwischen liegenden Hindernisses (Gesträuch, Sumpf, Gebäude u. dgl.) nicht geradezu

gemessen werden kann. Wie wird nun die Länge der Linie A B bestimmt werden können?

Auflösung. Wenn man zu beyden Orten A B aus einem angenommenen Standpuncte C kommen kann, so messe man C A, und trage diese Länge in gerader Linie zurück nach D, so, daß $CD = CA$ wird, und D mit C und A in gerader Linie liegt. So messe man auch C B, und trage die Länge zurück nach E, messe sodann E D; diese ist der Entfernung von A bis B gleich.

Beweis. Denn es entstehen zwey Dreyecke ACB und DCE, welche außer den gemessenen Linien auch die Winkel x und y als Scheitelwinkel gleich haben; folglich sind diese Dreyecke congruent, und das Maß von D E ist also auch jenes von A B.

§. 123. Aufgabe. Aus einer Seite, die 2″ lang, und den zwey daran liegenden Winkeln, wovon der eine $< 50°$ und der andere 87° groß seyn soll, ein Dreyeck zu construiren.

78. Auflösung. Man ziehe eine 2″ lange Linie, und setze an den einen Endpunct einen Winkel von 50°, und an den andern Endpunct einen Winkel von 87°. Verlängert man sodann ihre Schenkel so lange, bis sie sich durchschneiden, so entsteht ein Dreyeck mno, welches dem verlangten vollkommen entspricht.

Der Satz: »Zwey Dreyecke sind auch congruent, wenn sie eine Seite und die zwey daran liegenden Winkel gleich haben« gibt uns ein Mittel an die Hand,

die Entfernung zweyer Gegenstände A und B zu bestimmen, wovon nur einer (A) zugängig ist. XXVII

Wenn man nur zu einem der beyden Gegenstände kommen kann, so nehme man einen Standpunct C, messe C A, und trage diese Länge zurück nach D, messe den $< x$, und trage ihn nach D, so daß $< y = < x$. In dem Schenkel D E dieses Winkels gehe man so weit fort, bis man mit C und B in einer geraden Linie ist, in E. Sodann messe man D E, diese ist der Geraden A B gleich.

Denn es entstehen hier zwey Dreyecke A B C und C D E, welche eine Seite und die zwey daran liegenden Winkel gemein haben, und daher congruent sind.

Dieser Aufgabe schließt sich ihrer Natur nach noch folgende an.

Die Länge einer Geraden A B zu bestimmen, welche ganz unzugängig ist. XXVIII

Auflösung. Um die Entfernung zweyer Puncte A und B zu bestimmen, welche die Lage haben, daß man von dem Standpuncte C weder nach A noch nach B messen kann, könnte man durch einen Standpunct P die Entfernung M N

= A C, und durch den Standpunct Q die Entfernung G F = B C finden; sodann sowohl A C als B C rückwärts verlängern, bis C E = M N und C D = F G ist, und endlich D E messen, wo denn D E = A B seyn muß.

XXIX. Diese Aufgabe kann auch auf folgende Art aufgelöset werden:

Man nehme einen Punct C an, von welchem man nach A und B sehen kann, verlängere A C und B C über C; zwischen A C und B C stecke man eine durch den Punct C gehende Gerade D E aus, und mache D C = C E; sodann bemerke man in der Geraden C A den Punct F, welcher mit D B, und in der Geraden C B den Punct G, welcher mit D A in einerley Richtung liegt. Nun mache man auch CH = CF, und C J = C G, und suche in der Geraden C Z einen Punct, der mit J E, und in der Geraden C M einen Punct, der mit E H einerley Richtung hat; so ist die Gerade M Z der unzugängigen A B gleich und parallel.

III. Von Parallelogrammen.

§. 124. Lehrsatz. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwey congruente Dreyecke getheilt.

79. Beweis. Denn nach gezogener Diagonale entstehen die vier Winkel x, y, w und z; und

$\angle x = \angle z$ (als Wechselwinkel), deßgleichen auch $\angle y = \angle w$; folglich sind die Dreyecke ABD und BDC einander congruent.

Hieraus folgt nun wieder:

§. 125. Daß $AB = DC$, und $AD = BC$, d. h., daß in einem Parallelogramme die gegenüber liegenden Seiten einander gleich sind, oder, wie man solches auszudrücken pflegt: »*Parallelen zwischen Parallelen einander gleich sind.*«

§. 126. Ferner ist wegen der Congruenz der Dreyecke $\angle A = \angle C$, und unverkennbar ist $\angle x + \angle y = \angle w + \angle z$; da nun $\angle B = \angle x + y$, und $\angle D = \angle w + z$; so ist auch $\angle B = D$; *folglich sind in einem Parallelogramme auch die gegenüber liegenden Winkel einander gleich.*

§. 127. Ein Parallelogramm zu zeichnen, wenn zwey an einander gränzende Seiten AB 80.
und AD eines Parallelogrammes, und der $\angle m$, den sie bilden, gegeben sind.

Auflösung. Man setze die Seiten AB und AD unter dem gegebenen Winkel x an einander. Weil nun die gegenüber liegenden Seiten gleich seyn müssen, so beschreibe man aus D mit dem Halbmesser AB, und aus B mit dem Halbmesser AD Bogen, welche sich in C schneiden, und ziehe DC und BC.

§. 128. Lehrsatz. Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen haben gleichen Flächenraum.

Dieß kann so bewiesen werden:

Beweis. Es sind drey Fälle möglich; ent-
81. weder fällt e in a d,
82. oder in d,
83. oder außer a d.

Im ersten Falle ist △ a e b $\cong$ △ d c f, weil alle drey Seiten wechselsweise gleich sind; folglich zu jedem das Trapez e d b c addirt, ist a b c d = e b c f.

Im zweyten Falle ist △ a e b = △ d c f, und zu jedem das Dreyeck d b c addirt, ist a b c d = e b c f.

Im dritten Falle ist △ a e b = △ d c f, und von jedem das △ d e g abgezogen, hingegen das △ b g c addirt, ist a b c d = e b c f.

§. 129. Zusatz. Dieser Lehrsatz dient zur Verwandlung eines Parallelogrammes in ein anderes ihm gleiches, worin sich ein gegebener Winkel befindet.

§. 130. Aufgabe. Ein Quadrat in ein Rhomboides, worin sich ein Winkel von 54° befindet, zu verwandeln.

84. Auflösung. Man verlängere die obere Seite des Quadrats, und setze an irgend einen Endpunct der Grundlinie desselben, z. B. an a den Winkel

von 54°, verlängere hierauf den Schenkel bis e, und ziehe mit demselben durch den andern Endpunct (b) der Grundlinie die Parallel-Linie b f, so ist a c d b = a e f b.

§. 131. Aufgabe. Einen Rhombus in ein Rechteck zu verwandeln.

Auflösung. Man verlängere 1.) die Linie op nach b hin. 2.) Man setze an irgend einen Endpunct der Grundlinie des Rhombus einen rechten Winkel, z. B. in a, und ziehe mit der Linie a b eine Parallele durch den Endpunct c, so ist das Rechteck a b d c = dem Rhombus o p c a. 85.

IV. Von der Verwandlung der Figuren in Dreyecke ꝛc.

§. 132. Lehrsatz. Jedes Parallelogramm ist zweymahl so groß, als ein Dreyeck von gleicher Grundlinie und Höhe; oder jedes Dreyeck ist halb so groß, als ein Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe.

Denn △ a d b ist offenbar die Hälfte des Parallelogramms a b c d. Da aber dieses jedem andern Parallelogramme von eben der Grundlinie und Höhe gleich ist, so folgt, daß △ a d b auch die Hälfte eines jeden andern Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe sey. 86

§. 133. Hieraus folgt, daß auch alle Dreyecke von gleichen Grundlinien uud Höhen einander an Flächenraum gleich sind.

§. 134. Nun ist es leicht

1. jedes Dreyeck in ein anderes ihm gleiches zu verwandeln;

2. jedes Dreyeck in ein ihm gleiches Parallelogramm und umgekehrt zu verwandeln; und endlich

3. ein gegebenes Vieleck in ein ihm an Fläche gleiches Dreyeck zu verwandeln.

§. 135. Zusatz. Bey Verwandlungen der ersten Art muß man Parallel-Linien mit den Grundlinien durch die Spitzen der zu verwandelnden Dreyecke ziehen, wie die Auflösungen folgender Aufgaben zeigen werden.

§. 136. Aufgabe. Ein rechtwinkeliges Dreyeck in ein stumpfwinkeliges, worin sich ein Winkel von 120° befindet, zu verwandeln.

87. Auflösung. 1.) Man ziehe mit der Grundlinie a b des Dreyeckes a b c eine Parallel-Linie durch die Spitze c desselben. 2.) Man lege an b den Winkel von 120°, und verlängere dessen Schenkel bis zur Parallel-Linie, d. i. bis zum Puncte d, und ziehe 3.) die Linie a d, so ist △ a b c = △ a b d.

§. 137. Aufgabe. Ein rechtwinkeliges Dreyeck in ein spitzwinkeliges, worin sich ein Winkel von 70° befindet, zu verwandeln.

Auflösung. Man setze an d einen Winkel von 70°, und verfährt übrigens so, wie bey der vorhergehenden Verwandlung. 88.

§. 138. Ein rechtwinkeliges Dreyeck in ein gleichschenkeliges zu verwandeln.

Auflösung. Nachdem man mit der Grundlinie des gegebenen Dreyeckes eine Parallel-Linie durch die Spitze desselben gezogen hat, so theilt man hierauf 1.) die Grundlinie in zwey gleiche Theile. Aus dem Theilungspuncte (aus der Mitte) der Grundlinie errichte man 2.) eine Senkrechte zur Parallel-Linie hin, und ziehe 3.) aus den Endpuncten der Grundlinie nach dem Puncte d, in welchem die Senkrechte die Parallel-Linie geschnitten hat, gerade Linien. Ist dieses geschehen, so ist $\triangle$ abc = $\triangle$ adc. 89.

§. 139. Bey der Verwandlung vierseitiger Figuren in Dreyecke muß man die Vierecke durch eine Diagonale theilen, und sodann das obere Dreyeck so in ein anderes verwandeln, daß die eine Seite davon in die verlängerte Grundlinie des Viereckes zu liegen kommt.

§. 140. Aufgabe. Ein Rechteck in ein Dreyeck zu verwandeln.

Auflösung. Man ziehe 1.) die Diagonale cb, wodurch das Rechteck abcd in die beyden Dreyecke abc und cbd getheilt wird. Hierauf wird 2.) mit der Diagonale cb eine Hülfs-Pa- 90.

rallele de durch die Spitze d des obern Dreyeckes b d c gezogen, wodurch die verlängerte Grundlinie in e durchschnitten wird. Und hierauf wird 3.) die Linie c e gezogen. Ist dieses geschehen, so ist das Rechteck a b d c = △ a c e.

Beweis. △ a c b = △ a c b,

△ c d b = △ b c e; (Wegen gleicher Grundlinie c b, und weil beyde Dreyecke zwischen den Parall. c b und d e liegen).

folglich △ a c b + △ c d b = △ a c b + △ b c e;

folglich □ a b d c = △ a c e.

91. §. 141. Aufgabe. Das Trapezoides a b r q in ein Dreyeck zu verwandeln.

Auflösung. Wenn man die Diagonale b q gezogen hat, so verfährt man eben so, wie bey der vorhergehenden Aufgabe, wodurch sodann das Trapezoides a b r q = △ a b n wird.

§. 142. Aufgabe. Ein Parallelogramm zu machen, welches einem gegebenen Dreyecke gleich sey.

92. Auflösung. Man halbire die Grundlinie des Dreyeckes, und setze auf diese Hälfte ein Parallelogramm, welches mit dem Dreyecke gleiche Höhe hat, oder zwischen einerley Parallelen liegt.

Mithin ist das Parallelogramm d a f e = △ a b c.

93. §. 143. Lehrsatz. Wenn durch einen Punct k der Diagonale eines Parallelogrammes eine Linie

ef mit ad parallel, und eine Linie hg mit ab parallel gezogen wird, so sind die kleineren Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich.

Beweis. Die Dreyecke abc und adc sind $\cong$, auch sind die Dreyecke $aek + kgc = \triangle ahk + kfc$; daher, diese von abc und adc abgezogen, Gleiches übrig bleibt, nähmlich $ebgk = hdfk$.

§. 144. Auf diesen Satz gründet sich die Auflösung der Aufgabe, ein Parallelogramm auf einer gegebenen Seite und unter einem gegebenen Winkel einem gegebenen Dreyecke gleich zu machen; wie auch: Eine gegebene geradlinige Figur in ein Parallelogramm von gegebenem Winkel zu verwandeln.

§. 145. Aufgabe. Jede geradlinige Figur in eine andere von gleichem Flächenraume, aber von weniger Seiten, zu verwandeln.

Auflösung. Man ziehe be, und mit ihr 94.
parallel af, welche sich mit der verlängerten de in f schneidet; ziehe ferner bf, so ist $\triangle bef = \triangle bea$, und die Figur $bfdc = baedc$; jene aber hat eine Seite weniger als diese.

Anmerkung. So kann man jede geradlinige Figur auf ein Dreyeck von gleichem Flächeninhalte bringen, wenn man das vorige Verfahren immer wiederhohlt.

§. 146. Aufgabe. Mehrere Dreyecke von gleicher Höhe in ein einziges von eben der Höhe zu verwandeln, welches jenen zusammen genommen gleich ist.

Auflösung. Man mache ein Dreyeck a b c von der gegebenen Höhe c d, dessen Grundlinie a b den Grundlinien a e, e f und f b der gegebenen Dreyecke I, II und III zusammen genommen gleich ist.

§. 147. Diese Sätze biethen uns auch die Anweisung dar, manche Aufgaben im Felde mittelst des Kreuz-Diopters zu lösen.

XXX. Um z. B. durch Hülfe dieses Werkzeuges die Entfernung A B, welche nicht unmittelbar bestimmt werden kann, zu messen, stelle man das Winkelkreuz über den Punct A, visiere nach B, und unter einem rechten Winkel von A nach C, stelle das Instrument in C, visiere nach A, und unter einem rechten Winkel von C nach D, gehe nun in der Linie D C so lang fort, bis man von einem Puncte D sowohl C als B unter dem rechten Winkel C D B erblickt. Sobald dieses der Fall ist, so muß C D = A B seyn.

Denn, da die Winkel bey A, C und D drey rechte sind, so muß auch < B ein rechter seyn, und A C D B ist ein Rechteck, d. h. A B = C D. Da nun die letztere Linie ohne Hinderniß gemessen werden kann, so hat man das Maß von A B gefunden.

§. 148. Die Entfernung von M nach N kann, XXXI. unter der Voraussetzung, daß nach dem Puncte N nicht unmittelbar gemessen werden kann, durch Hülfe des Winkelkreuzes dadurch aufgelöset werden, daß man von M nach N, und unter einem rechten Winkel von M nach D visiert, in D auf MD die Senkrechte DE errichtet, und in derselben so lange fortschreitet, bis man zum Puncte E kommt, worin < DEN ein rechter wird. Nun ist MNED wieder ein Rechteck, und das Maß von DE muß auch das Maß von MN seyn.

§. 149. Nun können wir zu einem Satze übergehen, der so wichtig ist, daß er **Magister matheseos**, d. i. **mathematischer Meister** genannt wird.

(Man nennt ihn auch den Stein der Weisen, den Stein des Anstosses. Ungeduldige Lehrer nennen ihn sogar die Eselsbrücke. Denn ein fauler Schüler wird ihn nie verstehen und beweisen lernen.

Lehrsatz. Das Quadrat der Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreyeckes ist gleich den Quadraten der beyden Katheten zusammen genommen.

Oder:

Eine Linie aus dem rechten Winkel senkrecht durch die Hypothenuse, theilt das Hypothenusen-Quadrat in zwey

Rechtecke, wovon jedes dem anstossenden Katheten-Quadrate gleich ist.

Anmerkung. Dieser wichtige Satz heißt auch der Pythagoräische Lehrsatz von seinem Erfinder Pythagoras; einem der größten griechischen Gelehrten, welcher 500 Jahre vor Christi Geburt lebte, und für diese Erfindung seinen Göttern ein hundertfaches Opfer darbrachte.

§. 150. Man kann diesen Lehrsatz auf mehrerley Art beweisen. Die gewöhnlichste Art ist folgende:

95. Erster Beweis.

Man ziehe die Linien an und cf,

so ist $\triangle$ adn $\cong$ $\triangle$ cdf;

denn ad $=$ df, } die Seiten eines u.
und dn $=$ cd, } desselben Quadrates.
und $\angle$ y $+$ m $=$ m $+$ x;

folglich $\triangle$ adn $\cong$ $\triangle$ cdf (Nach d. 2. Grundſ. von der Congr. der Dreyecke).

Nun ist $\triangle$ adn $= \frac{1}{2} \square$ dbon;
Eben so ist $\triangle$ cdf $= \frac{1}{2} \square$ adfg;

also $\frac{1}{2} \square$ dbon $= \frac{1}{2} \square$ adfg;
und $\square$ dbon $=$ $\square$ adfg.

Eben so kann bewiesen werden, daß das kleinere Rechteck R $=$ dem kleineren Quadrate Q sey; also Quadrat Q $+$ Quadrat adfg $=$ Rechteck R $+$ Rechteck bdno,

oder:

Die Quadrate der beyden Katheten zusammen genommen sind so groß, als das Quadrat der Hypothenuse.

§. 151. Die faßlichste Beweisart scheint folgende zu seyn:

Zweyter Beweis. 96.

Man ziehe im parallel mit bc, und ez mit ac. Dadurch erhält man zwey sich deckende Parallelogramme bmic und azec.

Denn ic = ac,

und cb = ce,

so sind auch die zwischen den gleichnahmigen Seiten liegenden Winkel sich gleich, nähmlich

$$\angle x + \angle y = \angle y + \angle o.$$

Da aber das obere Rhomboides mit dem größeren Quadrate, und das untere Rhomboides mit dem größeren Rechtecke gleiche Grundlinie und Höhe hat, so ist das größere Quadrat auch dem größeren Rechtecke gleich.

Weil nun auf ähnliche Art bewiesen werden kann, daß das kleinere Rechteck dem kleinern Quadrate gleich ist, so ist die Wahrheit des obigen Lehrsatzes neuerdings bestätiget.

§. 152. Wer auch dieses nicht begreift, zeichne 97.
sich nach der hierher gehörigen Figur das Quadrat der Hypothenuse und die der beyden Katheten auf Papier, und schneide dann die kleineren Quadrate in die von den hier gezogenen Linien bezeichneten

fünf Stücke. Diese fünf Stücke wird er dann auf dem Quadrate der Hypothenuse (nach den darauf gezogenen Linien und angemerkten Ziffern) so zusammen setzen können, daß dieselben das Hypothenusen-Quadrat ganz und genau bedecken.

Ein auffallender Beweis des Gesagten!

§. 153. Von der Richtigkeit dieses Satzes kann man sich auch noch auf eine andere sehr sinnliche Art überzeugen, welche auch zugleich einen leichten Weg an die Hand gibt, senkrechte Linien auf dem Felde zu errichten.

98. Wenn nähmlich in einem rechtwinkeligen Dreyecke die Hypothenuse in fünf gleiche Theile getheilt wird, und die größere vier, die kleinere drey solcher Theile hat, und über jede dieser drey Seiten ein Quadrat, und in jedes derselben, nach den Theilen 3, 4, 5 seiner Seite, die kleineren Quadrate gezeichnet werden: so zählt man in dem einen 9, in dem andern 16, und im größten 25. 9 + 16 ist aber ebenfalls 25; folglich das Quadrat der größten Seite, d. i. der Hypothenuse, gleich den beyden anderen Quadraten der kleineren Seiten, d. i. der Katheten.

XXXII Demnach kann auf dem Felde aus einem Puncte A einer Geraden AB eine Senkrechte errichtet werden, wenn man eine Schnur in zwölf gleiche Theile theilt, den 3. und 7. Theilungspunct bezeichnet, und dann die beyden Ende verbindet, und ebenfalls bezeichnet. Nun spanne man diese Schnur mittelst dreyer an die Zeichen angehaltenen Pflöcke in einer solchen Lage aus, daß der Theilungspunct 3 auf den gegebenen Punct A, und die Enden der Schnur in der Geraden AB liege; der Theilungspunct 7 wird sodann senkrecht über A stehen.

Oder:

Man messe von A nach B 3^0; bemerke das XXXIII
Ende C der 3^0 mit einem Pflocke; befestige eine 5^0 lange Schnur mit einem Ende in C, und bezeichne mit dem anderen Ende über A einen Bogen ab. Eben das thue man aus A, aber nur mit der Länge von vier Klaftern. Wenn man aus dem Durchschnittspuncte x auf A eine Gerade aussteckt, so ist dieß die verlangte Senkrechte.

§. 154. Kehrt man die Behauptung des Pythagoräischen Lehrsatzes um, so heißt sie:

Wenn in einem Dreyecke das Quadrat der größten Seite den Quadraten der beyden übrigen Seiten zusammen genommen gleich ist, so ist das Dreyeck ein rechtwinkeliges.

Beweis. Denn sind in dem Dreyecke acb 99.
die Quadrate von ac und cb zusammen dem Quadrate der Seite ab gleich; so richte man aus c auf cb die Senkrechte cd der Seite ca gleich; zieht man nun bd, so ist das Quadrat davon so groß als das Quadrat der Seiten bc

und cd, oder bc und ca, also auch dem Quadrate von ab gleich.

Also ist $ab = bd$; die Dreyecke acb und bdc sind gleich groß, und der $\angle acb$ ist dem $\angle bcd$ gleich, der ein rechter ist.

§. 155. Der Pythagoräische Lehrsatz dient hauptsächlich zur Addition, Subtraction, Multiplication und Division der Quadrate.

100. §. 156. Zusatz. Wenn in einem Dreyecke acb eine Senkrechte am von der Spitze auf die Grundlinie gefällt wird, so entstehen dadurch die Abschnitte der Grundlinie bm und mc;

und es ist $am^2 = ab^2 - mb^2$,
aber auch ist $am^2 = ac^2 - mc^2$;
folglich ist $ab^2 - bm^2 = ac^2 - mc^2$ *).

§. 157. Folgende Aufgaben mit ihren Auflösungen werden dieß erläutern:

Aufgabe. Ein Quadrat zu machen, welches zwey anderen zusammen genommen gleich sey.

101. Auflösung. Man setze die Seiten der letzteren rechtwinkelig an einander, ziehe die Hypothenuse, und beschreibe ihr Quadrat.

Beweis. $ab = nc$, so $ab^2 = nc^2$,
$od = cr$, also $od^2 = cr^2$;

also $ab^2 + od^2 = nc^2 + cr^2$;
aber $nc^2 + cr^2 = nr^2$;
folglich auch $ab^2 + od^2 = nr^2$.

*) Die Zahl 2 oben rechts bedeutet immer das Quadrat der gegebenen Seite.

So lassen sich drey und mehrere Quadrate in eines bringen.

§. 158. Zusatz. Vom Quadrate der Hypothenuse das Quadrat der einen Kathete abgezogen, bleibt das Quadrat der anderen übrig.

§. 159. Aufgabe. Ein Quadrat zu machen, welches dem Unterschiede zweyer gegebenen Quadrate gleich sey. 102.

Auflösung. Auf die Seite ab des kleineren gegebenen Quadrates richte man in a eine Senkrechte auf, und beschreibe aus b mit der Seite bc des größeren Quadrates einen Bogen, der jene Linie in c schneidet, so ist ac die Seite des gesuchten Quadrates.

§. 160. Aufgabe. Ein Quadrat noch einmahl so groß zu machen, als ein gegebenes.

Auflösung. Man ziehe die Diagonale ab, so ist das Quadrat, welches hierauf errichtet wird, noch einmahl so groß, als das gegebene Quadrat adbc. 103.

Beweis. Da $cb = ac$ ist, so ist $cb^2 = ac^2$.

Nun ist aber $cb^2 + ac^2 = ab^2$;

folglich ist auch $ab^2 = 2\,ac^2$ oder $2\,cb^2$.

§. 161. Aufgabe. Ein Quadrat dreymahl so groß zu machen als ein gegebenes.

Auflösung. Man mache solches 1.) noch einmahl so groß (wie erst gezeigt wurde). 2.) An die Seite bn des noch einmahl so groß gemachten 104.

Quadrates setze man die Seite $ab = nq$, und ziehe von q nach b die Hypothenuse bq, wovon das Quadrat $bqts = nb^2 + nq^2$ ist.

Beweis. Da $nb^2 = 2\,ab^2$, und $nq^2 + nb^2 = bq^2$ ist; so muß $bq^2 = 2\,ab^2 + ab^2 = 3\,ab^2$ seyn.

§. 162. Aufgabe. Ein Quadrat viermahl so groß zu machen als ein gegebenes.

105. Auflösung. Man mache die Seite ab noch einmahl so lang, und errichte darauf ein Quadrat $anmq$, so ist dieses viermahl so groß als das von ab.

§. 163. Aufgabe. Ein Quadrat noch einmahl so klein zu machen.

106. Auflösung. Man ziehe 1.) zwey Diagonalen, wodurch das Quadrat in vier gleichschenkelige rechtwinkelige Dreyecke eingetheilt wird. Hierauf setze man 2.) ein solches Dreyeck unterhalb ab, so entsteht das verlangte Quadrat $acbn$, welches die Hälfte von dem Quadrate $abed$ ist.

Beweis. $\triangle\,abd = \frac{1}{2}\square\,abed$,

$\triangle\,abd = \triangle\,adc + \triangle\,acb$;

nun ist $\triangle\,acb = \triangle\,abn$;

daher $\triangle\,abd = \triangle\,acb + \triangle\,abn$.

Nun ist aber $\square\,aebn = \triangle\,acb + \triangle\,abn$;

folglich $\square\,aebn = \triangle\,abd = \frac{1}{2}\square\,abed$.

Zur Zerstreuung will ich nun die Biographie des Pythagoras hier folgen lassen.

Pythagoras, der Sohn eines Kaufmanns, aus Samos (einer griechischen Insel im Archipelagus) gebürtig, ungefähr 500 Jahre (583) vor Christo, war einer der berühmtesten Weisen des griechischen Alterthumes. Seinen ersten Unterricht empfing Pythagoras in seiner Vaterstadt. Später reisete er nach Ägypten, um die Schule der ägyptischen Priester zu besuchen. Mit vermehrtem Wissen kehrte Pythagoras in seine Heimath zurück, wo er mit glücklichem Erfolge eine philosophische Schule stiftete. Dennoch faßte er den Entschluß, Samos zu verlassen, und begab sich nach Großgriechenland. Hier landete er zu Krotona, dessen Einwohner durch die Verderbtheit ihrer Sitten berüchtiget waren. Als er beym Betreten des Landes einige Fischer gesehen, die eben einen reichen Fang gethan hatten, kaufte er ihnen alle Fische ab, ließ sie wieder in's Meer, und gab den Umstehenden die Lehre, keine Fische zu tödten, und überhaupt sich aller thierischen Nahrung zu enthalten. Auch soll er, als die Netze noch im Wasser gewesen, genau die Anzahl der Fische bestimmt haben. Dadurch erschien er als ein außerordentlicher Mann, und Leute aus allen Volks-Classen versammelten sich um ihn her.

Obschon die guten Wirkungen seines Einflusses bald sichtbar wurden, indem an die Stelle der Völlerey und Sittenlosigkeit Nüchternheit und Mäßigkeit traten; so fehlte es doch nicht an Feinden, an deren Spitze ein reicher und angesehener Bürger stand, welchen Pythagoras durch Verweigerung der Aufnahme unter seine Schüler gegen sich aufgebracht hatte. Um sich zu rächen, überfiel dieser einst ein Haus, wo eine Anzahl von Pythagoräern versammelt war, umringte es mit seinen Anhängern, und steckte es in Brand. An vierzig Personen verloren das Leben. Pythagoras selbst war wahrscheinlich nicht in dem Hause gegenwärtig. Er flüchtete sich; fand aber immer wieder Feinde, die auf seinen Untergang dachten; daher suchte er endlich im Tempel der schönen Künste und Wissenschaften eine Freystätte, wo er aber aus Mangel an Nahrung in einem Alter von achtzig Jahren umkam.

Einige Zeit nach seinem Tode errichteten ihm seine Schüler Statuen, und bezeigten ihm eine so abergläubische Verehrung, daß sie sein Haus in einen Tempel verwandelten, und ihn als eine Gottheit anriefen.

Zu den vielen Erdichtungen, womit man seine Lebensgeschichte ausgeschmückt hat, gehört, daß er einen Bären, der eine ganze Gegend verwüstet, mit einem Worte gezähmt; daß er einen Ochsen abgehalten, Bohnen zu fressen, indem er ihm etwas in's Ohr geraunt habe; daß er einen Adler aus dem Himmel herab gerufen habe; daß er an zwey Orten zugleich gegenwärtig gewesen; Naturbegebenheiten vorher gesagt habe, und beym Überfahren über einen Fluß von diesem mit dem Zurufe: »Heil, Pythagoras!« sey begrüßt worden. — Vor dem Volke erschien er in einem langen, weißen Gewande, mit herabfließendem Barte, und einer goldenen Krone auf dem Haupte, in seinem Äußern ernst, gebieterisch und würdevoll. Diese Eigenheiten trugen viel dazu bey, ihm bey dem Volke den Anschein eines übermenschlichen Wesens zu geben.

Seine Schüler durften keine anderen Kleider tragen, als solche, welche die größte Reinheit und Einfachheit der Sitten bezeichneten. Um sie in Demuth zu üben, gab er sie drey Jahre lang dem beständigen Widerspruche, dem Spotte und der Verachtung seiner anderen Schüler preis, und verurtheilte sie zu freywilliger Armuth, indem sie ihr Vermögen in die öffentliche Casse liefern mußten. Nach Beschaffenheit der Umstände legte er ihnen ein Stillschweigen von zwey bis fünf Jahren (das Pythagoräische Stillschweigen) auf. Dadurch sicherte er sich zugleich vor zudringlicher Neugierde und feindlichem Widerspruche. Er gab seine Lehren, als unfehlbare Sätze, vor den Blicken seiner Zuhörer durch einen Vorhang verborgen. Das bekannte: «Er hat's gesagt,« galt statt alles Beweises. Nur wer die rauhe Bahn der Prüfungen geduldig zurück gelegt hatte, durfte als Eingeweihter des Meisters Wort in dessen unmittelbarer Gegenwart vernehmen. Wer, durch die Schwierigkeiten abgeschreckt, sein Vorhaben aufgeben wollte, der konnte ungehindert zurück treten, und seine Beyträge zur Casse wurden zurück gezahlt. Man beging sein Leichenbegängniß, errichtete ihm ein Grab, wie einem Todten, und gedachte seiner nicht mehr.

Die Lebensweise in der Pythagoräischen Schule war folgende: Die Pythagoräer, etwa 600 an der Zahl, lebten bey einander in einem öffentlichen Gebäude in der vollkommensten Ordnung. An jedem Morgen wurde bestimmt, was den Tag über vorgenommen werden solle, und an jedem Abende untersucht, was geschehen sey. Sie standen auf vor Aufgang der Sonne, um sie zu verehren; dann wurden Verse hergesagt, oder man suchte durch Musik die Geisteskräfte zu wecken und für die Pflichten des Tages geschickt zu machen. Sodann wurden mehrere Stunden in ernsten Studien zugebracht. Hierauf folgte eine Pause zur Erhohlung, in welcher gewöhnlich ein einsamer Spaziergang gemacht wurde, um sich dem Nachdenken zu überlassen; dann eine Unterhaltung. Vor der Mahlzeit wurden mancherley gymnastische Übungen angestellt. Das Mahl bestand vornehmlich in Brot, Honig und Wasser. Der Überrest des Tages war öffentlichen und häuslichen Angelegenheiten, dem Gespräche, dem Bade und religiösen Gebräuchen gewidmet.

Pythagoras soll die Rechentafel, d. i. eine Tafel, welche das Ein mahl eins in einem eingeschlossenen Vierecke enthält, erfunden haben; daher Pythagoräische Rechentafel. Auch war er der Erfinder einer musikalischen Tonleiter (Pythagoräische Lyra), welche nach seinem Tode in Erz eingegraben, und in einem Tempel aufbewahrt wurde. Die Erfindung des Monochords, eines Instrumentes mit einer einzigen Saite, das zur Messung der musikalischen Intervallen diente, ist ebenfalls ihm beygelegt worden. Pythagoras betrachtete die Musik nicht als eine vom Ohre zu beurtheilende Kunst, sondern als eine auf mathematische Grundsätze und Verhältnisse zurück zu führende Wissenschaft; und er glaubte, daß die himmlischen Sphären, worin die Planeten sich bewegen, indem sie bey ihrem Umschwunge den Äther theilten, einen Ton hervorbrächten, und daß dieser Ton verschieden seyn müsse nach ihrer Größe, Schnelligkeit und Entfernung. Seine Nachfolger benützten diese Lehre, um von ihrem Meister zu erzählen, daß er der einzige Sterbliche gewesen, dem die Götter vergönnt hätten, die Harmonie der Sphären zu vernehmen. Die Geometrie, welche er in Ägypten erlernt hatte, brachte er in die Form einer regelmäßigen Wissenschaft. Nach seiner Vorstellung war der Punct das

Einfache, die Linie das Zweyfache, die Fläche das Dreyfache, und der Körper das Vierfache. Von den geometrischen Sätzen, welche ihm zugeschrieben werden, sind folgende die wichtigsten: Die inneren Winkel eines Dreyeckes sind gleich zweyen rechten; und in einem rechtwinkeligen Dreyecke ist das Quadrat der Hypothenuse den Quadraten der Katheten gleich.

V. Von der Ähnlichkeit der Figuren und ihrer Eintheilung.

§. 164. Grundsätze. 1.) Wenn zwey Dreyecke einerley Höhe haben, so verhalten sie sich zu einander, wie ihre Grundlinien.

107. Denn wird ein Dreyeck a d c gezeichnet, dessen Grundlinie a c noch einmahl so groß ist, als die Grundlinie a b eines anderen Dreyeckes a b d, und diese beyden Dreyecke haben dieselbe Höhe, so wird das Dreyeck b d c so groß seyn, als das Dreyeck a d q; das Dreyeck a b d ist also die Hälfte des Dreyeckes a d c; folglich verhält sich das Dreyeck a d b zu △ d a c, wie a b zu a c, d. i. wie 1 zu 2.

§. 165. 2.) Wenn zwey Dreyecke einerley Grundlinien haben, so verhalten sie sich, wie ihre Höhen.

108. Denn, wird ein Dreyeck gezeichnet, dessen Höhe d e noch einmahl so groß ist, als die Höhe

eb eines anderen Dreyeckes; so wird auch das Dreyeck a d c noch einmahl so groß seyn, als △ a b c.

Denn e b = b d, und weil die Dreyecke e b a und b d a auch einerley Höhe (a e) haben, so sind sie demnach auch an Raum gleich.

So ist auch △ e b c = △ b d c aus der nähmlichen Ursache; folglich a b d + d b c = △ a b c; oder △ a d c = 2 △ a b c.

§. 166. 3.) **Wenn zwey Dreyecke verschiedene Höhen und verschiedene Grundlinien haben, so verhalten sich ihre Räume, wie die Producte aus ihren Höhen in ihre Grundlinien.**

Hat z. B. von zwey Dreyecken das eine zur Grundlinie 5', und zur Höhe 4', so ist das Product aus der Grundlinie in die Höhe = 5 × 4 = 20, und das andere zur Grundlinie 8', und zur Höhe 7', so ist das Product aus der Grundlinie in die Höhe = 8 × 7 = 56; folglich verhalten sich diese Dreyecke = 20 : 56 = 5 : 16.

§. 167. 4.) **Da die Dreyecke immer die Hälfte von denjenigen Parallelogrammen sind, welche mit ihnen gleiche Grundlinien und Höhen haben, so müssen sich solche eben so zu einander, wie die Dreyecke zu einander, verhalten.**

§. 168. Lehrsatz. Wenn man mit der Grundlinie eines Dreyeckes eine Parallele zieht, so werden die zwey anderen Seiten dadurch in proportionale Abschnitte getheilt.

109. Es sey abc das Dreyeck, und de mit bc gleichlaufend, so ist ad : db = ae : ec.

Denn es ist, nachdem die Hülfslinien be und dc gezogen sind, △ ade : △ edb = ad : db, und △ aed : △ dec = ae : ec.

Da aber die Dreyecke edb und dec gleiche Grundlinien und Höhen haben, so ist △ edb = △ dec,

und da △ ade : △ edb = △ ade : △ dec, so muß auch ad : db = ae : ec seyn.

Aus dieser Proportion ergeben sich, nach den Regeln der Arithmetik, nachstehende Folgerungen:

1. ad : ad + db = ae : ae + ec,
   oder ad : ab = ae : ac;
2. ad : ae = ab : ac.

§. 169. Zusatz. Dieser Satz ist in der Geometrie sehr wichtig. Denn er dient nicht nur zur Theilung der Linien, sondern auch zur Theilung der Dreyecke, Vierecke und Vielecke aus einer Spitze in gleiche und proportionale Theile.

Daher sollen nun wieder mehrere Aufgaben mit ihren Auflösungen folgen.

§. 170. Aufgabe. Eine gegebene Linie AB in mehrere, z. B. in drey gleiche Theile, zu theilen.

Auflösung. Man setze 1.) an den Endpunct der gegebenen Linie AB eine andere gerade Linie Ac schief an. Man trage 2.) auf diese mit einer beliebigen Eröffnung des Zirkels drey gleiche Theile ao, on und nq. Hierauf verbinde man 3.) den Endpunct der gemachten drey Theile q mit b, und ziehe 4.) mit dieser Hülfslinie qb Parallele durch die Puncte o und n, durch welche sodann die gegebene gerade Linie ab in d und e in drey gleiche Theile eingetheilt wird. 110.

Beweis. Da in dem Dreyecke abq die Linie en mit bq $\mp$ gezogen ist, so muß sich verhalten:

$$\begin{array}{rl} ab : eb = & aq : nq; \\ \text{aber } aq : nq = & 3 : 1; \\ \text{also auch } ab : eb = & 3 : 1; \end{array}$$

folglich eb der dritte Theil von ab, von welcher db $= \frac{2}{3}$ ist. 111.

§. 171. Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie AB in eben dem Verhältnisse, wie eine andere AC, einzutheilen.

Auflösung. Man setze beyde Linien unter einem beliebigen Winkel an einander, verbinde ihre Endpuncte durch eine gerade Linie CB, und ziehe durch die Theilungspuncte G und F die mit CB parallelen Linien GE, FD, so sind E und D die Theilungspuncte auf der Linie AB.

112. §. 172. Aufgabe. Ein Dreyeck in drey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man theile die Grundlinie in drey gleiche Theile, und ziehe hierauf aus den Theilungspuncten nach der Spitze gerade Linien, so ist dadurch das Dreyeck in die verlangten Theile eingetheilt worden.

Denn es verhält sich alsdann:

$\triangle\, abc : \triangle\, abd = ac : ad$;

aber $ac : ad = 3 : 1$;

also verhält sich auch $\triangle\, abc : \triangle\, abd = 3 : 1$;

folglich ist $\triangle\, abd = \frac{1}{3} \triangle\, abc$ etc.

§. 173. Um ein Viereck aus einer Spitze in gleiche und ungleiche beliebige Theile eintheilen zu können, so muß man es zuerst in ein Dreyeck verwandeln, hierauf dieses Dreyeck in die verlangten Theile eintheilen, und diese Theile durch neue Verwandlungen der Dreyecke in das Viereck bringen.

§. 174. Aufgabe. Ein Rechteck in drey gleiche Theile einzutheilen.

Auflösung. Man verwandle 1.) das Rechteck in das Dreyeck abc. 2.) Man theile die Grund-

linie dieses Dreyeckes in drey gleiche Theile in u, 113.
o und e. 3.) Man ziehe von b nach u eine Gerade, so ist $\triangle$ abu $= \frac{1}{3}$ des Dreyeckes abe, und $= \frac{1}{3}$ des Rechteckes abcd, weil $\triangle$ abe $=$ $\square$ abcd ist, und $\triangle$ abu ganz in dem $\square$ abcd liegt. 4.) Man ziehe die Linie bo, so ist $\triangle$ ubo ebenfalls $= \frac{1}{3}$ des $\triangle$ abe; weil aber der Theil bdo nicht ganz in dem $\square$ abcd liegt, so muß dieser durch eine Verwandlung in ein anderes Dreyeck in das Rechteck gebracht werden. Deßhalb ziehe man 5.) mit der Diagonale bd eine Parallele durch den Punct o bis r, so ist das Trapezoides

$$\text{budr} = \triangle\,\text{ubo}.$$

$$\begin{aligned} \text{Denn } \triangle\,\text{ubd} &= \triangle\,\text{ubd}, \\ \triangle\,\text{dbo} &= \triangle\,\text{dbr}, \\ \hline \text{also } \triangle\,\text{ubd} + \triangle\,\text{dbo} &= \triangle\,\text{ubd} + \triangle\,\text{bdr}; \\ \hline \text{oder } \triangle\,\text{ubo} &= \text{Trap. budr.} \end{aligned}$$

Da nun $\triangle$ abu das erste Drittel, das Trapezoides budr das zweyte Drittel von dem gegebenen Rechtecke ausmacht, so muß das übriggebliebene Dreyeck bcr das letzte Drittel desselben seyn.

§. 175. Aufgabe. Ein Trapez in fünf glei- 114.
che Theile einzutheilen.

Auflösung. Man verwandle 1.) das Trapez abcd in das $\triangle$ abg, theile 2.) die Grundlinie a g in fünf gleiche Theile,

ziehe 3.) aus b nach o und u gerade Linien, so werden dadurch die beyden Theile a b o und o b u, welche in das Trapez fallen, abgeschnitten.

Hierauf verwandle man durch die Diagonale b d, und durch die damit parallel gezogenen Linien r e und t n das △ u b r in das Trapezoides b u d e, und das △ b r t in das △ b e n, so bleibt das △ b e n, als der letzte fünfte Theil von dem Trapez a b c d, übrig.

§. 176. Um ein Vieleck aus einer beliebigen Spitze in gleiche oder in verhältnißmäßige Theile eintheilen zu können, so verwandelt man dasselbe ebenfalls in ein Dreyeck, theilt hierauf die Grundlinie desselben in die verlangten Theile, und bringt diejenigen Theile, welche außerhalb des Vieleckes fallen, und Dreyecke sind, durch neue Verwandlungen in das Vieleck.

§. 177. Grundsätze. 1.) Zwey Dreyecke sind einander ähnlich, wenn immer zwey Seiten des einen mit zwey Seiten des andern proportional sind.

115. Die Dreyecke A B C und a b c z. B. sind einander ähnlich; denn es verhält sich

$$AB : BC = ab : bc,$$
nähmlich $9 : 12 = 3 : 4$;
und $BC : CA = bc : ca$,
nähmlich $12 : 15 = 4 : 5$;
und $CA : AB = ca : ab$,
nähmlich $15 : 9 = 5 : 3$.

2.) Zwey Dreyecke sind auch einander ähnlich, wenn zwey Seiten des einen mit zwey Seiten des andern eine Proportion ausmachen, und wenn dabey die Winkel, welche von diesen Seiten eingeschlossen werden, einander gleich sind.

Wenn z. B.
$$AB : AC = ab : ac,$$
und $\angle A = \angle a$ ist.

3.) Zwey Dreyecke sind auch dann einander ähnlich, wenn die drey Winkel einzeln genommen in dem einen Dreyecke eben so groß sind, als die drey Winkel einzeln genommen in dem andern Dreyecke.

Wenn z. B.
$$\angle A = \angle a,$$
$$\angle B = \angle b,$$
und $\angle C = \angle c$ ist.

§. 178. Zusatz. Bey allen drey Fällen folgt, daß ähnlichen Seiten gleiche Winkel, und gleichen Winkeln ähnliche Seiten gegenüber stehen.

116. §. 179. Zusatz. Aus dem dritten der erst aufgeführten Grundsätze folgt, daß $\triangle\, abc \backsim \triangle\, aed$ sey; deßhalb verhält sich $ac : ad = bc : ed$. Da nun $ac : ad = 12 : 11$, so muß sich auch $bc : ed = 12 : 11$ verhalten. Eben so verhält sich $ac : ah = bc : gh$; verhält sich nun $ac : ah = 12 : 1$, so verhält sich auch $bc : gh = 12 : 1$. Ist demnach $bc = 12''$, so ist $ed = 11''$, und $gh = 1''$.

§. 180. Nun ist Ort und Zeit da, vom verjüngten Maßstabe zu sprechen.

Soll eine auf dem Felde gemessene Figur auf dem Papiere dargestellt werden, so braucht man dazu einen viel kleineren Maßstab, der zwar mit der Feldruthe gleich viele, aber viel kleinere Theile hat. Einen solchen Maßstab nennt man einen verjüngten Maßstab.

§. 181. Der verjüngte Maßstab ist und gilt auf dem Papiere das, was der wirkliche in der Natur gilt.

Hat z. B. ein Bauernhaus nach dem natürlichen Maße 3° Breite, und wir zeichnen dieses kleine Häuschen auf das Papier, so muß es auf demselben ebenfalls 3° messen. Allein in dem nähmlichen Verhältnisse, als das Häuschen auf dem Papiere kleiner als in der Natur ist, muß auch eine

Klafter auf dem Papiere kleiner, als sie in der Natur ist, erscheinen. Wollte ich dieses Häuschen auf dem Papiere noch kleiner darstellen, so müßte ich auch einen noch kleineren Maßstab haben, wovon ich 1° dreymahl in der Breite des Häuschens auftragen könnte.

Weil man aber hierbey oft sehr kleine Theile braucht, die sich nicht leicht mehr auf der Linie unmittelbar auftragen oder unterscheiden lassen, so macht man die Einrichtung so, wie sie in den Figuren 117 und 118 dargestellt ist.

§. 182. Gesetzt, AB bedeutete 1′, und man 117.
wollte diese Länge nicht unmittelbar in ihre 12″ theilen, so müßte man entweder 12 Parallele über AB, und von A aber nach E eine Querlinie, oder über AB nur 6 Parallele und 2 Querlinien AD und CE ziehen; und somit würde man in dem △ CEB von oben nach unten 1, 2, 3, 4, 5, 6″, und zwischen den Querlinien durchaus ½′ oder 6″ finden.

§. 183. Gesetzt, die Länge AB bedeutete 1°, 118.
welche hier in ihre 6′ getheilt ist, so, daß CB 1′ wäre. Nun würde diese kleine Länge CB nicht leicht unmittelbar in ihre 12″ getheilt werden können. Man zieht daher über AB 12 Parallele in gleicher Entfernung von einander, und von C nach

E eine schräge Linie; so hat man in dem Dreyecke E B C auf den Parallelen, von oben nach unten in der Ordnung, 1, 2, 3, 4 bis 12″.

§. 184. Die schrägen oder Querlinien heißt man auch Transversal-Linien, daher man diese Maßstäbe auch Transversal-Maßstäbe nennt.

§. 185. Bey den gewöhnlichen Messungen im Felde kann man den verjüngten Maßstab nicht so groß machen, daß 1 Wiener-Zoll nur 1° gibt; sondern man nimmt den Zoll zu wenigstens 10 oder 20°, zuweilen auch zu 30 und noch mehreren Klaftern an.

§. 186. Lehrsatz. Jedes rechtwinkelige Dreyeck wird durch eine aus der Spitze des rechten Winkels
119. auf die Hypothenuse senkrecht gezogene Linie a d in zwey Dreyecke getheilet, welche sowohl unter einander, als dem ganzen Dreyecke ähnlich sind.

Beweis. Im ganzen △ a b c ist bey a, und in den beyden kleineren Dreyecken sind bey d rechte <, der < b ist dem △ a b c und dem △ a b d gemein, so auch ist der < c dem △ a b c und dem △ a d c gemein; folglich sind die kleinen dem großen ähnlich, folglich auch unter einander.

Es verhält sich daher bd : da = da : dc; auch bd : ba = ba : bc; auch bc : ca = ba : ad.

§. 187. Und somit ist die Senkrechte da die mittlere Proportional-Linie zwischen den abgeschnittenen Stücken der Hypothenuse.

§. 188. Dieser Lehrsatz zeigt uns die Weise, folgende Aufgaben aufzulösen:

Zu zwey gegebenen Linien a und b die mitt- 120.
lere Proportional-Linie zu finden.

Auflösung. Man setze die beyden gegebenen Geraden in eine einzige gerade Linie zusammen, mache hierauf aus deren Mitte m um dieselbe einen halben Kreis, und errichte aus dem Puncte f, in welchem beyde Linien zusammen stoßen, eine Senkrechte nach q, so ist diese die mittlere Proportional-Linie zwischen ab und cd.

Beweis. Da $\angle q = 90^\circ$ ist,
und die Linie qf senkrecht auf rp steht;
so ist $\triangle rqf \backsim \triangle pfq$;
folglich verhält sich pf : fq = fq : fr.

§. 189. Aufgabe. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man verlängere die Seite ab, 121.
und trage cb aus b bis q. Sodann ziehe man

aus der Mitte n der Linie a q den halben Kreis a p q, und lasse aus b die Senkrechte b q fallen. Diese ist die mittlere Proportional-Linie zwischen a b und b c, und daher gleich der Seite des Quadrates, welches am Raume dem Rechtecke a b c d gleicht.

Beweis. Der Inhalt des Rechteckes a b c d = a b × c b, und der Inhalt des Quadrates o b p r = bp^2. Nun verhält sich aber

ab : bp = bp : bq,
und da bq = bc ist,
so ab : bp = bp : bc;
folglich $bp^2 = ab \times cb$.

§. 190. Aufgabe. Zu drey gegebenen Linien die vierte Proportional-Linie zu finden.

122. Auflösung. Man mache einen beliebigen Winkel, trage die beyden ersten Linien auf den einen, die dritte Linie auf den andern Schenkel, verbinde die Endpuncte der ersten und dritten durch die gerade Linie b d, und ziehe durch den Endpunct der zweyten die mit b d Parallele c e, so ist d e die gesuchte vierte Proportional-Linie.

§. 191. Lehrsatz. Die Flächen ähnlicher Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate der gleichliegenden Seiten.

Beweis. Man suche zu ab, ed und ef die 123.
vierte Proportionale bg, und schneide diese auf der Grundlinie bc ab, so ist das $\triangle$ abg dem $\triangle$ edf gleich, weil sie die gleichen $<$ b und e haben, die von gleichnahmigen Seiten eingeschlossen sind.

Eben diese bg ist aber auch die dritte Proportionale zu den beyden Grundlinien bc und ef; denn es verhält sich ab zu ed wie bc zu ef; folglich ist das Rechteck BGIH $=$ dem Quadrate efml.

Nun verhält sich

$$\triangle abc : \triangle abg = bc : bg,$$

und auch Rechteck

$$bckh : bgih = bc : bg;$$

folglich $\triangle abc : \triangle abg = bckh : bgih;$

d. i. $\triangle abc : \triangle def = bckh : efml.$

§. 192. Lehrsatz. Die Flächen ähnlicher Figuren überhaupt verhalten sich wie Quadrate gleichliegender Seiten.

Beweis. Sie lassen sich in ähnliche Dreyecke 124.
theilen.

Also $\triangle AEB : \triangle aeb = AE^2 : ae^2$

$\triangle EBD : \triangle ebd = ED^2 : ed^2$

$\triangle DCB : \triangle dcb = DC^2 : dc^2.$

Weil nun die Seiten proportional sind, so sind auch die Quadrate der Seiten proportional. Mithin kann man etwa das erste Verhältniß $AE^2 : ae^2$ statt der übrigen nehmen.

Alle Dreyecke haben also einerley Verhältniß; $\triangle AEB : \triangle aeb = \triangle EBD : \triangle ebd = \triangle DCB : \triangle dcb = AE^2 : ae^2$. Folglich auch $\triangle AEB + \triangle EBD + DCB : \triangle aeb + \triangle ebd + \triangle dcb = AE^2 : ae^2$; das heißt: Die ganzen Figuren verhalten sich wie $AE^2 : ae^2$, und überhaupt wie die Quadrate gleichliegender Seiten.

§. 193. Aufgabe. Um ein Dreyeck durch eine Linie zu halbiren, welche mit einer seiner Seiten parallel ist, verfahre man folgender Gestalt:

125. Es sey adm das gegebene Dreyeck, und die zu findende Theillinie soll mit ad parallel seyn.

Man halbire ad in c, errichte die Senkrechte $ch = cd$, ziehe dh, trage es von d nach b, ziehe durch b die $bf \mp dm$, und durch f die $fe \mp ad$, so ist $\triangle fem = \frac{1}{2} \triangle adm$.

Da sich die Flächen ähnlicher Dreyecke wie die Quadrate ähnlicher Linien in ihnen verhalten, so kömmt es darauf an, einzusehen, daß das Quadrat von a d noch einmahl so groß, als das Quadrat von f e ist; denn nun muß auch $\triangle$ a d m $=$ 2 $\triangle$ f e m seyn. Nun ist aber h c d ein rechtwinkeliges gleichschenkeliges Dreyeck, und das Quadrat von d h dem doppelten Quadrate von d c, d. h. dem halben Quadrate von d a gleich, und d h ist $=$ d b $=$ f e.

§. 194. Auf ähnliche Art kann auch ein gegebenes Dreyeck durch zwey gerade Linien, welche mit einer bestimmten Seite desselben gleichlaufend sind, in drey gleiche Theile getheilt werden.

Es sey a b m das zu theilende Dreyeck, 126.
und die Theilungslinien sollen mit a m parallel seyn.

Auflösung. Theilt man b m in drey gleiche Theile, nimmt b d $= \frac{1}{3}$ b m, macht die Senkrechte d c $=$ d b, zieht b c, errichtet die Senkrechte c n $=$ c d, und zieht b n, so ist das Quadrat von b n, wie man leicht sieht, $= \frac{1}{3}$ des Quadrates von b m.

($\square$ b d $= \frac{1}{9}$, $\square$ b m $= \frac{9}{9}$; folglich $\square$ b c $= \frac{2}{9}$; $\square$ b n $= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$).

Macht man daher b e $=$ b n, und zieht e p $\parallel$ a m, so ist $\triangle$ p b e $= \frac{1}{3}$ $\triangle$ a b m.

Errichtet man auf bn die Senkrechte $ns = nb$, so ist das Quadrat von $bs = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ des Quadrates von bm. Nimmt man daher $bf = bs$, und zieht durch f die $fq \mp am$, so ist $\triangle\, qbf = \frac{2}{3}\, abm$, und somit die Aufgabe aufgelöset.

§. 195. Lehrsatz. Ähnliche vielseitige Figuren können durch Diagonalen in ähnliche Dreyecke getheilt werden.

124. Beweis. Da die Figuren ähnlich sind, so ist $< A = < a$, und $AE : AB = ae : ab$; folglich wenn man EB und eb zieht, sind die Dreyecke EAB, eab ähnlich, und $AE : EB = ae : eb$, oder $AE : ae = EB : eb$. Aber auch $AE : ae = ED : ed$; folglich $EB : eb = ED : ed$. Da nun ferner $< AEB = aeb$, und $< AED = aed$, so ist auch $BED = bed$; folglich $\triangle\, BED \backsim \triangle\, bed$. Diese Schlüsse sind leicht auf alle folgenden Dreyecke fortzusetzen.

§. 196. Zusatz. Umgekehrt: Wenn Figuren sich durch Diagonalen in ähnliche Dreyecke theilen lassen, so sind sie selbst einander ähnlich.

§. 197. Nun sind wir auch im Stande, ein gegebenes Dreyeck zu verkleinern.

Diese Aufgabe verlangt, daß man ein kleines Dreyeck zeichnen solle, welches einem großen ähnlich sey; d. h. dieselbe Gestalt habe, und nur durch die geringere Größe sich von dem großen unterscheide.

In solchen Dreyecken nun, die einerley Gestalt haben sollen, müssen die Winkel des einen den Winkeln des andern gleich seyn, und die Seiten gleiches Verhältniß haben. Das erstere erhält man leicht durch den Transporteur, und das letztere durch den verjüngten Maßstab.

§. 198. Aufgabe. Soll zu einer gegebenen 127.
Figur eine andere ähnliche verzeichnet werden, bey welcher die Seiten ein gegebenes Verhältniß zu den Seiten der ersten haben sollen, so verbinde man einen Vieleckswinkel A mit den übrigen durch gerade Linien; nun bestimme man sich die Seite Ab aus der gleichnahmigen Seite AB und dem gegebenen Verhältnisse. Aus dem Puncte b ziehe man zu BC die Parallele bc, aus c die Parallele cd zu CD u. s. w. Die Figur Abcdef wird der Figur ABCDEF unter dem gegebenen Verhältnisse der Seiten ähnlich seyn.

Oder: Man ziehe außerhalb der Figur eine Ge- XXXV
rade AB, trage auf derselben von beliebiger Größe gleiche Theile auf, ziehe dann das ganze Rechteck

ABCD, welches so beschaffen seyn muß, daß es die ganze Figur umfaßt; durch die Theilungspuncte pqr führe man Parallele zu AB, und aus mno zu AD, so wird das Rechteck in eine Anzahl gleicher Theile und Quadrate abgetheilt. Nun verzeichne man ein anderes in eine gleiche Anzahl Quadrate abgetheiltes Rechteck abcd, indem man auf einer Geraden gleiche Theile, welche zu den vorigen das gegebene Verhältniß haben, in eben derselben Anzahl aufträgt, das Rechteck verzeichnet, und die Parallelen zur Seite ab, wie auch zu ad führet; endlich setzt man jeden Punct der gegebenen Figur, und alles in das gleichnahmige Quadrat, in eben der Lage hin, welche nun leicht getroffen werden kann. Die dadurch erhaltene neue Figur wird sodann der vorigen in dem gegebenen Verhältnisse ähnlich seyn.

§. 199. Diesen Lehren haben wir die Auflösung einer Menge von practischen Aufgaben mittelst des Meßtisches oder des Astrolabiums zu verdanken.

Als:

XXXVI. 1. Die Entfernung zweyer Orte (des Baumes A von dem Hause B) finden, die nicht unmittelbar gemessen werden kann.

a. Mit Hülfe eines Astrolabiums.

Man messe den < ACB und die Seiten CA und CB, so sind in dem △ ACB zwey Seiten mit dem eingeschlossenen < bekannt.

Nun verzeichne man den gemessenen < auf einem Papiere, und übertrage auf dessen Schenkel, nach einem verjüngten Maßstabe, die gemessenen Längen der Geraden CA und CB von c bis a und b; so wird auf eben demselben Maßstabe die Gerade ab die wirkliche Länge von AB anzeigen.

b. Mit Hülfe des Meßtisches.

Man suche einen Ort C von der Beschaffenheit, XXXVII
daß man von C nach A und B sehen und messen könne, stelle den Meßtisch daselbst horizontal, und stecke in einen Punct desselben eine feine Nadel senkrecht ein, und zwar in denjenigen Punct c des Meßtisches, der mit dem Puncte C auf der Erde übereinstimmt. Sodann visiere man mittelst des Visier-Lineals von c nach A und nach B, ziehe die unbestimmt langen Visier-Linien ca und cb, trage auf dieselben, nach einem verjüngten Maßstabe, die gemessenen Längen der Geraden CA und CB von c bis a und b, und untersuche, wie viel Theile die Gerade ab auf eben demselben verjüngten Maßstabe abschneidet; so wird man vermöge

der Ähnlichkeit der Dreyecke a c b und A C B die Länge der Geraden A B erhalten.

XXXVIII Auch könnte die Entfernung von A nach B dadurch gefunden werden, daß man mit dem Winkelkreuze von A nach B, und auf B A rechtwinkelig von A nach C visierte, und den Punct C auf dem Felde durch Messen der Linie A C bestimmte. Nimmt man nun zwischen A und C einen Punct D in bestimmter Entfernung von C, errichtet aus ihm, durch Hülfe des Instrumentes, die Senkrechte D E auf A C, und macht sie so lange, bis der in E eingesteckte Stab von den Stäben in B und in C bedeckt wird, so entstehen zwey ähnliche Dreyecke C D E und C A B. Mißt man nun noch die Größe von D E, so kann man durch die Proportion C D : D E = C A : A B die Größe des vierten Gliedes, d. h. die Entfernung A B berechnen.

XXXIX. 2. Eine Gerade A B, die nur an einem ihrer Endpuncte A zugängig ist, z. B. die Entfernung des Punctes A von B, zu messen.

a. Durch Hülfe des Winkelmessers.

Man suche einen Ort C von der Beschaffenheit, daß man von C nach A und B sehen, und C A messen kann.

Man messe nun die Standlinie A C, und beobachte an ihren Endpuncten die $\angle$ A und C; so ist dadurch in dem $\triangle$ ACB auch der dritte Winkel B bestimmt. Man ziehe daher auf dem Papiere eine Gerade ac, trage auf dieselbe, nach einem verjüngten Maßstabe, die Gemessene AC, und verzeichne an ihren Endpuncten $\angle a = CAB$, und $\angle c = ACB$; so ist $\triangle acb \backsim \triangle ACB$, und folglich kann die gesuchte Länge der Geraden AB auf eben demselben verjüngten Maßstabe durch Hülfe der Geraden ab bestimmt werden.

b. Mittelst des Meßtisches.

Man suche einen Ort C von der Beschaffenheit, daß man von C nach A und B sehen und CA messen kann; stelle den Meßtisch über C, visiere von c nach A und B, und übertrage die gemessene Gerade CA nach einem verjüngten Maßstabe von c bis a. Sodann stelle man den Meßtisch dergestalt in A, daß der Punct a gerade über A zu stehen komme, die Linie ac aber in der Richtung der Geraden AC liege, und visiere von a nach B; so wird die gezogene Visier-Linie ab die vorige cb in dem Puncte b durchschneiden, und die Linie ab auf eben demselben verjüngten Maßstabe die Länge der Geraden AB bestimmen, weil die Dreyecke acb und ACB einander ähnlich sind. XL.

3. Eine gerade Linie AB, d. i. die Entfernung zweyer Puncte A und B, zu messen, wenn keiner von beyden zugängig ist.

a. Mit dem Astrolabium.

XLI. Man messe die Standlinie CD, und beobachte an ihren Endpuncten die < m und n, y und x; so hat man in dem △ ACD die Seite CD mit den anliegenden Winkeln ACD und y bestimmt; folglich kann die Seite AD gefunden werden. Eben so kann man in dem △ CDB aus der Seite CD und den anliegenden Winkeln die Seite BD bestimmen. Darauf sind in dem △ ABD zwey Seiten, nähmlich AD und BD, sammt dem dazwischen liegenden < bekannt; folglich kann die dritte Seite desselben (AB) wieder durch Verzeichnung gefunden werden.

b. Mit dem Meßtische.

XLII. Man messe eine Standlinie CD von der Beschaffenheit, daß man von C nach A, B und D, und auch von D nach C, A und B sehen könne. Sodann stelle man den Meßtisch über C, visiere von C nach A, B und D, und trage die gemessene Gerade von c bis d. Darauf stelle man den Meßtisch mit dem Puncte d über D dergestalt, daß dc genau in der Richtung von DC liege, und visiere von d nach A und B; so werden die Visier-Linien da und db die vorigen ca und cb in den Puncten a und b durchschneiden, und die Gerade ab wird wegen der Ähnlichkeit der Dreyecke ADB und adb die gesuchte Länge von AB bestimmen.

4. Eine krumme Linie, z. B. die krumme Linie eines Baches zu bestimmen.

Man stecke längs der krummen Linie eine Gerade AB aus; auf die ausgesteckte Gerade errichte man von jeder merklichen Krümmung eine Senkrechte; messe dann die Länge jeder dieser Senkrechten, und auch die Entfernungen derselben von einander, so ist die gegebene Linie bestimmt. XLIII.

Die Senkrechten nennt man die Ordinaten, die Abstände 1 von 2, 2 von 3, 3 von 4 rc. Abscissen.

5. Soll eine Gerade AB, oder die Entfernung zweyer Gegenstände gemessen werden, zwischen denen ein Hügel sich befinden sollte, so muß der horizontale Abstand dieser Puncte angegeben werden; und dieser Abstand AB ist = den wagerechten Längen 1 + 2 + 3 + 4. XLIV.

Anmerkung. Um diese wagerechten Linien zu erhalten, bedient man sich einer Setzwage a, zweyer Richtscheite b (2^o lang), und einiger Pfähle c, welche in Schuhe, Zolle und Linien eingetheilt und mit beweglichen Armen versehen sind, um dadurch die Waglatte b so lange zu erheben, bis die Setzwage richtig einschlägt.

Vermittelst dieser Werkzeuge kann auch der Abfall einer Anhöhe, z. B. GH, gefunden werden; indem man die Senkrechten AF und IK addirt. Die Auflösung dieser Aufgabe kommt bey Wasserleitungen vor, weil der Ort des Wassers höher liegen muß, als der Ort an den das Wasser geleitet wird.

6. Die Höhe eines Thurmes bestimmen, ohne hinauf zu steigen.

Man wähle einen bequemen Standpunct b, setze dahin das Astrolabium so, daß der Halbmesser
XLV. wagerecht und der Bogen darüber vertical zu stehen komme; messe die Höhe des Mittelpunctes des Werkzeuges über dem Boden, erhebe sodann die bewegliche Regel so lange, bis der Faden der Absicht das Ende des Thurmes schneidet, und bemerke den $<$ abc. Nun sind von dem $\triangle$ abc eine Seite ab, und die zwey anliegenden $<$ m und n bekannt.

Ein nach dem verjüngten Maßstabe gezeichnetes $\triangle$ gibt auch die Seite ac an, wozu noch die

Höhe des Astrolabiums gerechnet wird, und die Höhe des Thurmes ist gefunden.

7. Die Höhe eines Thurmes bestimmen, zu dessen Fuß man nicht kommen kann.

Man bringe das Astrolabium zuerst über den Punct a, und bestimme den Winkel m; dann messe man die Länge ab, und bringe das Astrolabium auch über den Punct b, und bestimme den $<$ o; hierdurch sind von dem Dreyecke mco eine Seite und die zwey anliegenden Winkel bekannt. Durch Verzeichnung wird nun auch die Höhe dieses Dreyeckes bekannt, wozu noch die Höhe des Astrolabiums gerechnet wird, und cg ist also gemessen. XLVI.

Ohne Meßtisch und Astrolabium lassen sich derley Aufgaben folgender Maßen auflösen.

8. Die Länge einer Geraden AB zu bestimmen, welche zwar an ihren Endpuncten zugängig ist, aber nach ihrer ganzen Länge nicht ausgemessen werden kann. XLVII.

Man nehme einen Punct c von der Eigenschaft an, daß man von ihm nach A und B sehen und messen kann; dann messe man von C nach A und B, und trage von C auf CA und auf CB einen bestimmten Theil derselben, z. B. den vierten Theil in den Puncten mn auf; dann messe man mn; der so vielte Theil als Cn von AC und Cm von BC ist, wird auch mn von AB seyn.

9. Die Länge einer Geraden MN zu bestimmen, welche nur in einem ihrer Endpuncte, in M, zugängig ist.

XLVIII Man nehme den Standpunct D so an, daß man nach M ungehindert messen und nach N visieren kann; messe DM, verlängere sie rückwärts, und mache $DQ = \frac{1}{2} DM$, lege in Q den $< DQP = < M$, und verlängere ND willkührlich gegen P. Wird nun die Linie QE so weit verlängert, bis der Punct P mit D und N in gerader Linie liegt, so ist $PQ = \frac{1}{2} MN$.

Sollte man die Linie MD gar nicht verlängern können, so nehme man $DH = \frac{1}{2} DM$, mache $< DHI = < M$, so ist nun $HI = \frac{1}{2} MN$.

Auf ähnliche Art könnte man auch andere Theile von DM nehmen; doch dürfen dieselben nicht zu klein seyn.

10. Die Länge einer Geraden AB zu bestimmen, wenn dieselbe ganz unzugängig ist.

XLIX. Man nehme einen Punct C an, von welchem man nach A und nach B sehen kann; errichte auf

A C eine Senkrechte C F, messe dann eine gewisse Länge C D aus, mache D F einem bestimmten Theile von D C = (z. B. die Hälfte), errichte in F eine Senkrechte F G, und durchschneide dieselbe von der Richtung A D in dem Puncte G; so ist G F der eben so vielte Theil von A C, als D F von C D ist.

Eben so verfahre man mit B C, mit dem Bemerken, daß H I der eben so vielte Theil von C H seyn muß, als D F von C D ist.

Nun mache man C M = F G, und C N = K I, verbinde die Puncte M N; so ist auch M N der eben so vielte Theil von A B, als C M von A C, und C N von B C ist.

§. 200. Das Zerlegen vielseitiger Figuren in Dreyecke, wie überhaupt der Nutzen und Gebrauch der Dreyecke, ist in der Meßkunst von außerordentlicher Wichtigkeit, ja unentbehrlich; denn der Feldmesser muß die Kenntniß besitzen, auf dem Papiere von einem Grundstücke eine demselben an Gestalt vollkommen ähnliche Zeichnung zu entwerfen, welches man eine Figur auf dem Felde in den Grund legen heißt.

Aufgabe. Wie wird nun eine Wiese, oder ein Feld rc. in den Grund gelegt?

Dieß kann auf verschiedene Art geschehen.

Wenn man in dem Felde herum gehen kann, so verfährt man auf folgende Art:

L. 11. Man zerfälle die ganze Figur in lauter Dreyecke, trage ein jedes △ insbesondere ab, so wird man endlich die ganze Figur auf dem Papiere erhalten.

Oder:

LI. 12. Man stecke sich eine gerade Linie A B in dem Felde aus, und fälle aus jedem ausnehmenden Puncte der Figur darauf senkrechte Linien; sodann messe man die Abscissen A C, A J, A D etc., und

ziehe nun auf dem Papiere eine Gerade a b, trage aus dem Puncte a die gemessenen Entfernungen nach dem verjüngten Maßstabe auf, und errichte in den hierdurch erhaltenen Durchschnittspuncten, entweder diesseits oder jenseits der Geraden, (je nachdem es die Ähnlichkeit der Figur fordert) senkrechte Linien.

Endlich messe man auch die Ordinaten C C, J J, D D etc., und bestimme darnach die Senkrechten auf dem Papiere; so ergeben sich nach und nach die bestimmenden Puncte.

Bedient man sich zur Bestimmung der Senkrechten des Winkelkreuzes, so kann durch das so eben angezeigte Verfahren eine ganze Gegend von einem einzigen Manne geschwind und verläßlich aufgenommen werden.

13. Bequem ist es, wenn man aus einem Puncte des Umfanges A, oder auch im Felde selbst, alle Hauptpuncte übersehen und dahin messen kann. Man mißt dann die Linien AF, AE, AD etc., so wie auch die <, die sie in A machen, und zeichnet hieraus nach dem verjüngten Maßstabe eine ähnliche Figur auf das Papier. LII.

14. Eine ebenfalls sehr bequeme Art ist die, wenn man eine nicht zu kleine Standlinie PQ in dem Felde messen kann, sodann aus beyden Orten P und Q nach allen Hauptpuncten des Feldes visiert, und die < bemerkt, welche diese Linien PA, QA etc. mit der Standlinie machen. LIII.

Zeichnet man nun nach dem verjüngten Maßstabe aus der Seite PQ und den anliegenden Winkeln ein △ paq auf's Papier, welches dem großen ähnlich ist, so hat man in der Zeichnung den Punct a im Umfange der kleinen Figur, und so bey allen übrigen Puncten.

Anmerkung. Der Meßtisch ist bey diesen Messungen sehr bequem, weil man die verjüngte Figur sogleich auf demselben zeichnen kann, und nicht viel aufzuschreiben braucht.

VI. Von Kreisen und Polygonen.

§. 201. Es ist klar, daß eine Gerade, welche senkrecht durch die Mitte einer Sehne in einem Kreise gezogen ist, durch den Mittelpunct geht.

128. §. 202. Aufgabe. Soll daher der Mittelpunct eines gegebenen Kreises gefunden werden, so ziehe man nach Belieben eine Sehne, und durch ihre Mitte eine senkrechte Linie durch den ganzen Kreis. Die Mitte dieser Linie ist der verlangte Mittelpunct.

§. 203. Aufgabe. Durch drey gegebene Puncte einen Kreis zu beschreiben, voraus gesetzt, daß die drey Puncte nicht in einer geraden Linie liegen.

129. Auflösung. Man verbinde sie durch zwey gerade Linien, welche also Sehnen des Kreises werden; auf deren Mitte ziehe man senkrecht zwey andere Linien. Der Durchschnitt dieser letzteren ist der Mittelpunct des Kreises.

§. 204. Erklärung. Eine Figur, welche von lauter gleichen Sehnen eines Kreises begränzt wird, heißt ein Polygon.

§. 205. Zusatz. Vorzüglich haben derley Figuren diesen Nahmen, wenn sie mehr als vier Seiten haben.

§. 206. Zusatz. Ein Polygon wird also in einem Kreise beschrieben, und umgekehrt, durch die Ecken eines Polygons kann man einen Kreis beschreiben.

Auch diese Figuren kommen im gemeinen Leben oft vor. Z. B. manche Gebäude, Lusthäuser, Säle, Tische haben eine sechs- oder achteckige Figur.

Die hier gezeichnete Figur ist ein regelmäßi- 130.
ges Sechseck.

§. 207. Lehrsatz. Sowohl die Centri-Winkel als auch die Polygon-Winkel sind einander gleich, weil alle Dreyecke acb, bcd, dce etc. einander decken.

§. 208. Der Centri-Winkel und der Polygon-Winkel sind zusammen 180°.

§. 209. Aufgabe. Ein Polygon von einer gegebenen Anzahl Seiten einem Kreise einzuschreiben.

Auflösung. Man suche den Centri-Winkel, indem man 360° durch die Anzahl der Seiten dividirt, ziehe dem gemäß zwey Halbmesser, wie ca und cb, so hat man die Seite des Polygons ab, welche sodann in dem Umfange des Kreises herum getragen wird.

§. 210. Ein Sechseck ist am leichtesten zu zeichnen. Man braucht nähmlich nur den Halbmesser des Kreises sechsmahl in dem Umfange herum zu tragen, welches gerade ausgeht. Die Seite des regulären Sechseckes ist dem Halbmesser gleich. Der Centri-Winkel ist $= 60^\circ$. Für ein Achteck ist der Centri-Winkel 45°, und für ein Zwölfeck 30° ꝛc.

§. 211. Die einfachste regelmäßige Figur, welche in den Kreis beschrieben werden kann, ist das gleichseitige Dreyeck. Um dasselbe zu bilden, kommt es nur darauf an, einen Mittelpuncts-Winkel durch Construction zu finden, welcher $= 120^\circ$ ist.

131. Es sey in den mit ca beschriebenen Kreis ein regelmäßiges Dreyeck zu beschreiben, so ziehe man cm nach Belieben, beschreibe darüber das gleichseitige Dreyeck cnm, trage $< mcn$ nach nca, und ziehe da; so ist dieses die Seite des in den Kreis zu beschreibenden regulären Dreyeckes dba.

Denn, da $< x = 60^\circ$, so ist $< x + < y$ (oder $< dca$) $= 120^\circ$, und wenn ec nach b verlängert wird, so ist auch $< p = < o = 120^\circ$. Folglich muß $da = ab = bd$ seyn.

§. 212. Soll aber um einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Dreyeck construirt werden, so construire man eines in denselben, fälle aus dem Mittelpuncte auf jede seiner Seiten eine Senkrechte, verlängere sie bis zur Peripherie, und ziehe durch die drey Puncte drey Tangenten, so entsteht das verlangte umschriebene Dreyeck.

Wenn um den Kreis a g d f b e dieses Dreyeck 132.
zu beschreiben ist, so sey a b d das eingeschriebene regelmäßige Dreyeck, c e, c f, c g jede der drey Senkrechten, und i h, i k, k h jede der drey Tangenten, so ist h i k das zu bildende Dreyeck.

Denn, wenn man c k und c e zieht, so ist leicht zu zeigen, daß die Dreyecke c g h, c f k, c f i und c e i congruent sind. Folglich g k = k f = f i = i e, woraus dann das Weitere leicht hervor geht.

§. 213. Ein Polygon von einer gegebenen Anzahl Seiten auf einer gegebenen Seite zu zeichnen.

Man suche erst den Centri-Winkel x, ziehe 133.
ihn von 180° ab, so hat man den Polygon-Winkel p + q. Denn wenn man < x von 180° abzieht, so bleiben die Winkel p und y übrig. Aber es ist q = y; also p + y = p + q. Hat man nun den Polygon-Winkel gefunden, so kann man alle übrigen Seiten unter demselben Winkel an einander setzen.

Oder:

Man kann auch den Polygon-Winkel halbiren, so hat man die < p und y. Unter diesem <

setze man an a und b Linien an; wo sich diese durchschneiden, da ist der Mittelpunct des Kreises, in welchem man das Polygon beschreiben kann.

§. 214. Zusatz. Bey dem Sechsecke ist der Polygon=Winkel 120°; bey dem Achtecke 135°; bey dem Zwölfecke 150° rc.

§. 215. Lehrsatz. Zwey oder mehrere Dreyecke von gleicher Höhe sind zusammen einem einzigen Dreyecke von eben der Höhe gleich, dessen Grundlinie so groß ist, wie die Grundlinien jener Dreyecke zusammen genommen.

134. Denn das $\triangle$ bed $=$ $\triangle$ bcd;
folglich $\triangle$ acb $+$ bed $=$ acb $+$ bcd,
oder $\triangle$ acb $+$ bed $=$ $\triangle$ acd.

§. 216. Lehrsatz. Ein Polygon ist an Flächeninhalt einem Dreyecke gleich, welches den Perimeter des Polygons zur Grundlinie, und die Senkrechte vom Mittelpuncte auf eine Seite des Vieleckes zur Höhe hat.

Denn das Polygon besteht aus so vielen Dreyecken von gleichen Höhen, als es Seiten hat.

§. 217. Ein Kreis ist an Flächeninhalt einem Dreyecke gleich, welches die Peripherie zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat.

Denn man kann den Kreis als ein Polygon von unzählig vielen kleinen Seiten betrachten. Je mehr Seiten ein Polygon hat, desto mehr nähert er sich dem Kreise. Die Seiten eines solchen Polygons sind endlich nicht mehr von dem Umfange des Kreises, und die Höhe der Dreyecke, aus denen es besteht, nicht mehr vom Halbmesser zu unterscheiden.

Was also vom Polygone bewiesen ist, gilt auch vom Kreise.

III. Abschnitt.

Rechnende Geometrie.

I. Von Messung der Flächen.

§. 218. Im gemeinen Leben kommt man sehr oft in den Fall, Quadrate oder andere Figuren auszumessen, d. i. ihren Flächeninhalt bestimmen zu müssen. Wird z. B. gefragt, wie viel steinerne Platten zum Pflastern eines Saales erfordert werden; wie viel Fuß der Flächeninhalt eines Feldes oder Bauplatzes u. dgl. betrage, so sind solche Rechnungen nöthig.

§. 219. Zum Flächenmaße bedient man sich des Quadrates.

§. 220. Erklärungen. Ein Quadrat, dessen Seite einen Fuß lang ist, heißt ein Quadrat-Fuß. Ein Quadrat, dessen Seite 1'' lang ist, heißt ein Quadrat-Zoll ꝛc.

135. §. 221. Die 135. Figur stellt einen Quadrat-Zoll vor. Da der Zoll in zwölf Linien eingetheilt wird, so finden über der Grundlinie A B des Quadrates 12 Quadrat-Linien Platz, welche einen Streifen einnehmen, der 12''' lang und 1''' breit ist. Dergleichen Streifen können zwölf über einander in dem ganzen Quadrate Platz haben; so daß also der ganze Quadrat-Zoll 12mahl 12, d. i. 144 Quadrat-Linien enthält.

§. 222. Zusatz. Es ist hieraus klar, daß

$$1 \square^0 = 36 \square';$$
$$1 \square' = 144 \square'';$$
$$1 \square'' = 144 \square'''$$

u. s. w. enthält.

§. 223. Unmittelbare Messung der Flächen wird nicht gebraucht. Es würde eine mühsame Arbeit seyn, wenn man einen etwa aus Holz geschnittenen Quadratschuh in eine Fläche, so oft es angeht, wirklich hinein legen wollte. Weit bequemer läßt sich mit Hülfe der vorher gegangenen Sätze der Flächeninhalt einer Figur durch Rechnung finden.

II. Berechnung geradlinger Figuren.

§. 224. Aufgabe. Ein Rechteck zu berechnen.

Auflösung. Man messe zwey anliegende Seiten und multiplicire sie mit einander. Z. B. a b sey = 5″, a d = 8″; so findet über a b ein Streifen von 5 □″ Platz; und dergleichen Streifen kann man achtmahl über einander setzen; also ist der Flächeninhalt dieses Rechteckes 8 × 5 = 40 □″. 136.

§. 225. Aufgabe. Ein Quadrat zu berechnen braucht man nur eine Seite zu wissen, und diese mit sich selbst zu multipliciren. Z. B. wenn die Seite 12″ ist, so ist der Flächeninhalt des Quadrates 144 □″.

Anmerkung. Eben daher nennt man auch das Product, das heraus kommt, wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt, die Quadratzahl, oder schlechthin das Quadrat jener Zahl (wenn auch übrigens von keiner wirklichen Quadrat-Figur die Rede ist), und die Zahl selbst nennt man die Quadratwurzel jenes Productes.

Um sich die Sache noch deutlicher zu machen, betrachte man folgende kleine Tabelle wohl. Sie enthält die Wurzeln und Quadrate von 1 bis 100.

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Wenn ich 3 mit sich selbst multiplicire, so erhalte ich zum Producte 9. Multiplicire ich 4 mit sich selbst, so erscheinen 16. Die Zahlen 3 und 4 sind also die Wurzeln, und 9 und 16 ihre Quadrate.

§. 226. Zusatz. Eine Zahl zum Quadrate erheben, heißt also nichts anders, als sie mit sich selbst multipliciren, was jeder geschickte Knabe kann. Etwas schwerer hält es dagegen, im Falle die Quadratzahl schon bekannt ist, jene Zahl zu entdecken, welche, mit sich selbst multiplicirt, das Quadrat hervor gebracht hat. Dieses letztere Geschäft wird das Ausziehen der Quadratwurzel genannt.

Anmerkung. Die Art, die Quadrat-Wurzel aus irgend einer größeren Zahl auszuziehen, kann in diesen Blättern nicht angeführt werden. Der II. Theil unseres Rechenbuches (neuntes Kapitel) mag hinreichen, einen vorläufigen Begriff zu geben, wie Wurzeln ausgezogen werden können. Umständlicher und bestimmter wird hierüber die Algebra belehren.

§. 227. Aufgabe. Ein jedes Parallelogramm zu berechnen.

Auflösung. Man messe Höhe und Grundlinie, und multiplicire sie mit einander.

§. 228. Aufgabe. Jedes Dreyeck zu berechnen.

Man messe Höhe und Grundlinie, multiplicire sie mit einander, und dividire das Product mit 2, (weil jedes Dreyeck die Hälfte eines Parallelogrammes von gleicher Höhe und Grundlinie ist).

Man kann auch die Grundlinie mit der halben Höhe, oder die Höhe mit der halben Grundlinie multipliciren.

Eines Dreyeckes Grundlinie sey z. B. 25′, die Höhe 17′; so ist der Flächenraum dieses Dreyeckes =

a) $\frac{25' \times 17'}{2} = 212\frac{1}{2}\ \square'$;

b) $25' \times 8\frac{1}{2}' = 212\frac{1}{2}\ \square'$;

c) $12\frac{1}{2}' \times 17' = 212\frac{1}{2}\ \square'$.

§. 229. Aufgabe. Jede geradlinige Figur zu berechnen.

Auflösung. Man theile sie durch Diagonalen in Dreyecke; berechne jedes Dreyeck, und addire ihre Flächen; so hat man den Flächeninhalt der ganzen Figur.

Es sey z. B. die Figur a b c d e zu berechnen:

1. △ a b c.

$$
\begin{array}{rr}
\text{Grundlinie } ac = & 117' \\
\text{Höhe } bf = & 28' \\
\hline
& 936 \\
& 234 \\
\hline
& 3276 \\
2 & \overline{} \\
\text{Fläche} = & 1638\ \square'
\end{array}
$$

2. △ a c e.

$$
\begin{array}{rr}
\text{Grundlinie } ac = & 117' \\
\text{Höhe } eg = & 55' \\
\hline
& 585 \\
& 585 \\
\hline
& 6435 \\
2 & \overline{} \\
\text{Fläche} = & 3217\tfrac{1}{2}\ \square'
\end{array}
$$

3. $\triangle$ e d c.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Grundlinie e c} = & 118' \\
\text{Höhe d h} = & 33' \\
\hline
& 354 \\
& 354 \\
\hline
& 3894 \\
2 & \overline{} \\
\text{Fläche} = & 1947 \square'
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Addirt.} & 1.\ \triangle = & 1638 \square' \\
\text{»} & 2.\ \triangle = & 3217\tfrac{1}{2} \\
\text{»} & 3.\ \triangle = & 1947 \\
\hline
\end{array}
$$

Fläche der Figur $= 6802\frac{1}{2} \square'$.
Oder $188 \square^{\circ}\ 34 \square'\ 72 \square''$.

§. 230. Zusatz. Einige Geometer pflegen die Regeln zur Berechnung der Figuren durch gewisse Formeln darzustellen; daher sollen sie auch hier angeführt und erkläret werden.

1. Ein Quadrat wird bekanntlich berechnet, wenn man eine Seite desselben mit sich selbst multiplicirt. Bedeutet daher Q was immer für ein Quadrat, und s eine Seite desselben, so wird die Formel folgender Maßen ausgedrückt werden können:

$$Q = s \times s.$$

Da aber eine Zahl mit sich selbst multipliciren, sie zum Quadrate erheben heißt, und dieses immer dadurch angezeigt wird, daß man zur gegebenen Zahl oben rechts die Ziffer 2 ganz klein zu schreiben pflegt; so ist die Formel:

$$Q = s^2$$

ebenfalls richtig.

2. Der Inhalt eines Rechteckes wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt. Ist daher R was immer für ein Rechteck, g die Grundlinie, und h die Höhe, so heißt die Formel:

$$R = g \times h.$$

3. Eben so ist auch die Formel für die Berechnung eines schiefen Parallelogrammes, also, wenn P was immer für ein Parallelogramm bedeutet:

$$P = g \times h.$$

4. Soll die Berechnung eines r e c h t w i n k e l i g e n Dreyeckes dargestellt werden, so wird die Formel, da der Inhalt eines solchen Dreyeckes gleich dem halben Producte seiner beyden Katheten ist, und wenn K die größere und k die kleinere Kathete anzeigt, auf folgende Art ausgedrückt werden:

$$= \frac{K \times k}{2}$$

5. Bedeutet g die Grundlinie eines schiefwinkeligen Dreyeckes, h seine Höhe, so ist dessen Inhalt =

$\frac{g \times h}{2}$, oder $\frac{1}{2}$ g × h, oder auch $\frac{1}{2}$ h × g.

Ist g eine gerade Zahl, so wählt man die zweyte Formel; ist aber h eine solche, so wählt man die dritte Formel.

6. Der Inhalt des Parallel-Trapezes wird gefunden, wenn man die Maße seiner parallelen Seiten addirt, und diese Summe mit ihrem halben Abstande multiplicirt.

Nennt man daher die kleinere Parallel-Seite p, die größere P, und ihren Abstand a, so ist, wenn T was immer für ein Parallel-Trapez bedeutet,

$$T = \frac{(p + P) \times a}{2}$$

oder:

$$\frac{1}{2}(d + P) \times a;$$

oder auch $\frac{1}{2}$ a × (p + P).

7. Jedes irreguläre Viereck oder Trapez überhaupt wird berechnet, wenn man es durch eine Diagonale in zwey Dreyecke theilet, jedes Dreyeck berechnet, und ihre Inhalte summirt. Ist nun V was im-

mer für ein irreguläres Viereck, d die Diagonale, H die Höhe des größeren, und h die Höhe des kleineren Dreyeckes, so ist

$$V = \frac{d \times H}{2} + \frac{d \times h}{2},$$

$$\text{oder } (H + h) \times \frac{d}{2},$$

$$\text{oder auch } \frac{H + h}{2} \times d.$$

8. Da der Inhalt eines Vieleckes der Summe aller in ihm enthaltenen Dreyecke, in welche dasselbe durch die Diagonalen getheilt wird, gleich ist, so ist seine Berechnungs-Formel, wenn V was immer für ein Vieleck, und S $\triangle$ die Summe aller darin enthaltenen Dreyecke bedeutet, höchst einfach, nähmlich:

$$V = S \triangle.$$

9. Sollte der Inhalt eines regelmäßigen Vieleckes, eines Polygons, bestimmt werden, so braucht man (da jedes Polygon, wenn solches aus der Mitte in Dreyecke eingetheilt wird, so viele congruente Dreyecke enthält, als es Seiten hat,) nur ein $\triangle$ zu berechnen, und es mit der Anzahl der Vielecksseiten zu multipliciren.

Setzt man die Höhe eines dieser Dreyecke = h, eine Seite des Vieleckes = s, und die Anzahl der Seiten = S; so ist die Formel:

$$\text{Polygon} = \frac{h \times s}{2} \times S;$$

$$\text{oder } s \times S \times \tfrac{1}{2} h.$$

III. Kreisrechnungen.

a. Kreislinien-Rechnung.

§. 231. Oft ist es nothwendig, den Umfang eines Kreises zu bestimmen, ohne ihn unmittelbar messen zu können oder zu wollen.

Dieß ist möglich, wenn man den Durchmesser desselben weiß; weil man erfahren hat, daß, wenn der Durchmesser in sieben gleiche Theile getheilt ist, der Umkreis 22 solche Theile enthalte; so auch, daß der Umkreis 314 solche Theile habe, wovon der Durchmesser 100 enthält; und endlich, daß sich in dem Umkreise 355 gleiche Theile herum tragen lassen, deren auf den Durchmesser 113 fallen.

Demnach verhält sich also jeder Durchmesser zu seinem Umkreise wie 7 : 22, oder wie 100 : 314, oder wie 113 : 355; und umgekehrt, der Umkreis zum Durchmesser wie 22 zu 7, oder wie 314 zu 100, oder wie 355 zu 113.

Das erstere dieser Verhältnisse wendet man nur dann an, wenn es sich um keine außerordentliche Genauigkeit handelt. Am liebsten rechnet man nach dem zweyten Verhältnisse, weil darin die Zahl 100 vorkommt, mit der man bequem dividiren und multipliciren kann.

§. 232. Soll daher zu einem Durchmesser, z. B. zum Durchmesser des Mondes, welcher 468 geographische Meilen lang ist, der dazu gehörige Umkreis gefunden werden, so nimmt man eines von diesen Verhältnissen, und sagt, nach dem zweyten Verhältnisse (welches wir in der Folge immer zum Grunde legen wollen): Wenn zu einem Durchmesser von 100 Meilen ein Umkreis von 314 Meilen gehört, wie groß ist alsdann ein Umkreis, dessen Durchmesser 468 Meilen lang ist? und setzt solches nach der Regel de tri auf:

$$
\begin{array}{r}
100 : \underline{314 = 468 : x} \\
1872 \\
468 \\
1404 \\
\hline
1469{,}52
\end{array}
$$

1469,52 geographische Meilen. (Umfang des Mondes.)

§. 233. Soll aus dem Umkreise der Durchmesser gefunden werden, so wird jenes Verhältniß umgekehrt angesetzt.

Wie groß ist z. B. der Durchmesser der Erde, wenn ihr Umkreis 5400 Meilen lang ist?

$$414 : 100 = 5400 : x$$

540000 = 1719
2260
620
3060
234; also ist der Durchmesser der Erde beynahe 1720 geographische Meilen.

Anmerkung. Die Formel hierzu ist folgende, wenn D was immer für einen Durchmesser, und U den dazu gehörigen Umkreis anzeigt:

$$D : U = 100 : 314;$$

folglich:

$$U = \frac{D \times 314}{100}$$

$$D = \frac{U \times 100}{314}$$

§. 234. Auch kann man aus dem gegebenen Durchmesser und aus der Größe eines Centri-Winkels die Größe des dazu gehörigen Bogens finden; denn der Bogen verhält sich zum ganzen Umkreise, wie sich seine Anzahl von Graden zu 360^0 verhält. Nachdem daher aus dem Durchmesser der Umkreis berechnet worden ist, setze man die Proportion nach folgender Formel:

$$360^\circ : A^\circ = U : B$$

(A° bedeutet die Anzahl der Grade des gegebenen Centri-Winkels, U den Umkreis, und B die Länge des zu findenden Bogens).

Aus dieser Proportion ergibt sich, daß man die Größe eines Bogens, d. h. seine wirkliche Länge, finde, wenn man die Anzahl der gegebenen Grade des Bogens mit der Länge des Umfanges multiplicirt, und das Product durch 360 dividirt; folglich:

$$B = \frac{A^\circ \times U}{360}$$

Wie groß ist z. B. ein Kreisbogen, wenn der Durchmesser 100′ lang ist, und der Centri-Winkel 60° enthält?

$$\frac{60 \times 314}{360} = 52\tfrac{1}{3}, \text{ oder } 52' \ 4''.$$

§. 235. So kann auch aus der Größe eines Bogens und aus der Menge seiner Grade (welche auch die Menge des ihm entsprechenden Centri-Winkels ist), der Durchmesser berechnet werden. Denn die Zahl der Grade des gegebenen Winkels verhält sich zu 360°, wie die Größe des gegebenen Bogens zur Größe des ganzen Umfanges; folglich:

$$A^o : 360^o = B : U;$$

$$\text{daher } U = \frac{360^o \times B}{A^o}.$$

Auf diese Art erhält man die Größe des Umkreises, woraus nun leicht der Durchmesser berechnet wird.

Wie groß ist z. B. der Durchmesser eines Kreises, wenn davon ein Bogen 30′ lang, und der ihm entsprechende Centri-Winkel 45° enthält?

$$\frac{360^o \times 30'}{45^o} = 240' \text{ (Umkreis).}$$

$$\frac{240 \times 100}{314} = 76\tfrac{58}{157}{}' \text{ (Durchmesser).}$$

b. Berechnung von Kreisflächen.

§. 236. Da der Kreis einem regulären Vielecke von unendlich vielen Seiten gleicht, bey welchem der Umkreis gleich dem Umfange oder Perimeter des Vieleckes, und der Halbmesser gleich der Höhe des Dreyecks ist, und ein Vieleck dadurch berechnet wird, daß man den Perimeter desselben mit der halben Höhe multiplicirt, so muß auch der Inhalt des Kreises dadurch gefunden werden, daß man den Umkreis desselben mit dem halben Halbmesser, d. i. mit dem vierten Theile des Durchmessers multiplicirt.

Die Formel für die Berechnung der Kreisfläche wird also heißen, wenn K was immer für eine Kreisfläche anzeigt:

$$K = \frac{D \times U}{4}$$

Wie groß ist demnach der Inhalt eines Kreises, wenn sein Durchmesser 50′ ist?

$$\frac{314 \times 50}{100} = 157' \text{ (Umkreis).}$$

$$\frac{157 \times 50}{4} = 1962\tfrac{1}{2} \,\square' \text{ (Kreisfl.)}$$

Und wie groß ist der Inhalt eines Kreises, wenn der Umkreis gegeben ist, z. B. $39\frac{1}{4}'$?

$$\frac{39\frac{1}{4} \times 100}{314} = 12\tfrac{1}{2}' \text{ (Durchm.)}$$

$$\frac{39\frac{1}{4} \times 12\frac{1}{2}}{4} = 122\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{2}\square' \text{ (Kreisfl.)}$$

§. 237. Alle Kreisflächen sind ähnliche Figuren, daher haben ihre Inhalte auch gegen die Quadrate ihrer Durchmesser einerley Verhältnisse, und es ist bequem, in Zahlen zu bestimmen, wie sich das Quadrat des Durchmessers zum Inhalte des Kreises verhält.

Es sey $D = 100$, so ist $U = 314$, und $K = \frac{100 \times 314}{4} = (25 \times 314 =)$ 7850.

Daher verhält sich der Inhalt des Kreises zum Quadrate seines Durchmessers wie 7850 : 10,000, oder wie 785 : 1000, d. h. wenn das Quadrat des Durchmessers = 1000, so ist der Inhalt des Kreises = 785 eben dieser Maßtheile.

§. 238. Durch dieses Verhältniß kann nun leicht aus dem gegebenen Durchmesser die Fläche des Kreises bestimmt werden, ohne zuerst dessen Umfang zu berechnen. Es sey nähmlich der in Zahlen gegebene Durchmesser = D, so ist:

$$1000 : 785 = D^2 : x$$

$$x = \frac{D^2 \times 785}{1000} = D^2 \times \frac{785}{1000} = D^2 \times 0,785.$$

§. 239. Um aus dem in Graden gegebenen Centri-Winkel und dem Durchmesser den jenem $<$ entsprechenden Ausschnitt zu berechnen, bedenke man, daß sich der Ausschnitt so zum Inhalte des ganzen Kreises verhält, wie die Zahl der Grade des Centri-Winkels zu 360°.

Man kennt daher in dieser Proportion die Größe von drey Gliedern, und kann hieraus das fehlende vierte leicht berechnen.

Nähmlich:

$$A u : K = A^{\circ} : 360^{\circ}$$

$$\text{also } A u = \frac{K \times A^{\circ}}{360^{\circ}}$$

137. Es sey z. B. der Durchmesser b d eines Kreises = 240″, der < c am Mittelpuncte, welcher den Sector a c b bildet, = 54°, wie groß ist dessen Flächenraum?

$$240^2 = 57600$$

$$57{,}600 \times 0{,}785 = 45216 \,'\square' \text{ (Kreisfläche).}$$

$$\frac{45{,}216 \times 54^{\circ}}{360} = 6782{,}4 \,\square'' \text{ (Ausschnitt).}$$

§. 240. Soll man den Abschnitt eines Kreises berechnen, so ziehe man von den Enden der Sehne nach dem Mittelpuncte zwey Halbmesser, wodurch ein Ausschnitt entsteht, welcher den gegebenen Abschnitt nebst einem Dreyecke enthält, und es ist klar, daß die Größe des Abschnittes übrig bleibt, wenn man von dem Inhalte des Ausschnittes jenen des Dreyeckes wegnimmt.

So ist z. B. der Inhalt des Ausschnittes a e b c = 6782,4″. Wird nun von diesem Flächeninhalte das △ a c b, dessen Grundlinie a b = 110″, und dessen Höhe c d = 109″, und dessen Flächeninhalt $= \frac{110 \times 109}{2} = 5995 \,\square''$ ist, abgezogen, so erhält man das Segment a d e b, dessen Flächeninhalt daher =

6782,4□'' — 5995□'' = 787,4□'' ist.

§. 241. Sollte der Flächeninhalt eines Ringes gefunden werden, so bedenke man, daß derselbe dem Unterschiede beyder Kreisflächen gleich ist, welcher daher leicht bestimmt werden kann. Die Formel hierzu ist höchst einfach, und wenn K den Inhalt der größeren Kreisfläche, und k den Inhalt der kleineren anzeigen soll, so heißt sie:

Ring = K — k.

Ist z. B. der äußere Durchmesser eines Kreisrandes = 198', und der innere Durchmesser 112'; so enthält die Ringfläche 20,928 □'.

Denn die Kreisfläche des größeren Durchmessers ist = 30,775 □',
und die des kleineren = 9,847 □';
folglich der Kreisrand = 20,928 □'.

§. 242. Hierher gehört auch noch eine schöne Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes. Nähmlich:

Aus zwey gegebenen Seiten eines rechtwinkeligen Dreyeckes die dritte Seite durch Rechnung zu finden.

Ist z. B. eine der Seiten 3', die andere 4', so enthält das Quadrat der ersten Seite 9 □',

*

das der zweyten 16 □′, die Summe ist 25′. Sind die gegebenen Seiten senkrecht auf einander, so ist 25 □′ das Quadrat der dem rechten Winkel entgegen gesetzten Seite; die Wurzel daraus, 5′, ist die Länge der dritten Seite.

Ist im Gegentheile die Hypothenuse gegeben, und eine der anderen Seiten z. B. 3′; so ist die andere Seite die Wurzel aus dem Unterschiede der Quadrate dieser beyden Seiten.

25 □′ — 9 = 16 □′;

$\sqrt[2]{16}$ □′ = 4′; Länge der gesuchten Seite.

LIV. Wenn das Dreyeck A B C auf dem Felde mittelst des Kreuz-Diopters aufgenommen werden soll, und man hat in der Seite b c als Standlinie den Punct n gefunden, die Längen b n, n c und die Höhe n a gemessen; so findet man hieraus jede der anderen Seiten.

Ist n a = 120°; so ist n a² = 14 400 □°;
ist n c = 160°; so ist n c² = 25,600 □°;
und die Summe dieser Quadrate = 40,000 □°;

$\sqrt[2]{4,00,00}$ = 200° = A C.

Ist n a = 120°; so ist n a² = 14,400 □°;
ist u b = 90°; so ist n b² = 8,100 □°;
und die Summe dieser Quadrate = 22,500 □°

$\sqrt[2]{2,25,00}$ = 150° = A B.

Zum Schlusse der Geometrie sollen noch einige practische Aufgaben des Feldmessens aufgelöset werden.

1. Den Flächeninhalt eines Feldes zu messen. LV.

Man zerfälle es, so weit es angeht, in Dreyecke, wobey man die Seiten, die wenig von der geraden Linie abweichen, als gerade Linien annimmt, wie a b und f g. Es bleiben aber dabey oft noch Stücke übrig, wo der Umfang sehr gekrümmt ist, wie a i h g. In diesem Falle mißt man von einer der Hauptlinien a g nach den merkbarsten Wendungspuncten des Umfanges h und i senkrechte Linien ab, k i und l h. Die Stücke a k i und g l h berechnet man als Dreyecke, das Stück h l k i etwa als ein Parallelogramm. Auf ähnliche Art hilft man sich auch bey dem Stücke b c d e f.

Zu der oben gezeigten Berechnung der Dreyecke ist es aber nothwendig, die Höhe derselben zu wissen. Die Höhen (wie a q und f p) auf dem Felde selbst zu bestimmen und zu messen, würde aber viel Schwierigkeiten haben. Man bedient sich daher des Mittels, das Feld in's Kleine zu zeichnen, oder wie man sagt, in den Grund zu legen, da man denn die Höhe der Dreyecke auf der Zeichnung finden kann.

LVI. 2. Die Entfernung von A nach B auf eine andere Weise zu bestimmen, als bisher gezeigt wurde.

Die Entfernung von A nach B kann auch dadurch bestimmt werden, daß man eine Standlinie C D von bekannter Größe annimmt, einen Punct O bestimmt, welcher sowohl in der Visier-Linie C B, als in der Visier-Linie D A liegt; dann eben so einen Punct E, welcher in C A, und einen Punct H, welcher in D B sich befindet. Werden nun die Linien C E, E O, C O, D H, H O und D O gemessen, so kann das Viereck E H D C nebst den Linien C O und D O, vermittelst des verjüngten Maßstabes auf dem Papiere verzeichnet werden. Verlängert man nun C O und D H, welche sich in B, und D O und C E, welche sich in A durchschneiden, so wird die Linie A B nach dem verjüngten Maßstabe so groß seyn, als die ihr ähnliche auf dem Felde nach dem großen Maßstabe ist.

3. Obwohl die auf dem Felde gegebenen Flächen, z. B. Äcker, Wiesen, Gärten u. dgl. nicht immer durchaus geradlinig begränzt sind, so können doch in vielen Fällen diese Gränzen als geradlinig angesehen werden. Krummlinige Gränzen werden nach dem bekannten Satze, daß kleinere

Theile krummer Linien ohne bemerkbaren Fehler für gerade zu halten sind, behandelt.

4. Um eine Figur in den Grund zu legen, welche durchaus krummlinig begränzt ist, kann man auch auf folgende Weise verfahren.

Man lege um dieselbe eine geradlinige Figur, LVII. welche dieselbe so genau umschließt, als es geschehen kann, z. B. das Viereck A B C D, messe die Seiten A B, B C, C D, D A, und wenn es möglich ist, auch die Diagonale D B, so kann dieses Viereck mittelst des verjüngten Maßstabes im Kleinen construirt werden, und man sieht, wie durch das schon früher erklärte Verfahren nun auch die krummlinigen Abweichungen von den geraden Seitenlinien so gezeichnet werden können, daß die krummlinige Figur im Kleinen der großen ähnlich ist.

Sollte aber die Localität es nicht gestatten, eine Diagonale wie D B messen zu können, weil die Fläche z. B. sumpfig, oder ein See, oder mit Gebüschen bewachsen ist, u. dgl., so könnte, um die Größe von D B zu finden, irgend eine der obigen Auflösungen angewendet werden.

5. Auch kann hier folgendes Verfahren ausgeführt werden. Man mißt A D, trägt ihr Maß

mit dem verjüngten Maßstabe auf das Papier, legt an A, mittelst des △ E A G den < A, an D durch das △ M D N den < D, trägt die Maße von A B und D C auf die im Kleinen gezogenen Linien, so wird die Schlußlinie so groß nach dem verjüngten Maßstabe seyn, als B C nach dem großen ist.

Sollten Hindernisse nicht gestatten, die Dreyecke E A G und M D N im Inneren des Viereckes B A D C zu wählen, so verlängere man A D nach √, C D nach L, B C nach P, D C nach Q, und nehme nun die Dreyecke L D V, Q C P außerhalb des Vierecks, wodurch nun ebenfalls die < bey D und C im Kleinen verzeichnet werden können.

6. Da man bey Übertragung des Meßtisches von einem Standpuncte in einen andern leicht Fehler begeht, so hat das so genannte Feldmessen aus einem Stande Vorzüge.

LVIII. Sollte man z. B. die Entfernung A B aus einem Standorte C bestimmen, so setze man den Meßtisch gehörig über C, visiere nach B und A, ziehe c b und c a, und trage C A von c in a.

Nun nehme man in C A einen beliebigen Punct D, und in der von D nach B visierten Linie einen willkührlichen Punct E, visiere aus C nach E, messe C E, und trage sie nach dem kleinen Maße von c in e; deßgleichen auch C D, welche aus c nach d getragen wird. Wenn nun d e verlängert wird, bis sie die Visier-Linie c B in b schneidet, so ist, nachdem a b gezogen worden, diese a b nach dem verjüngten Maße der A B nach dem Feldmaße gleich.

7. Auf ähnliche Art kann auch der Abstand zweyer Gegenstände aus einem Standpuncte bestimmt werden, wenn es nicht möglich ist, nach einem von beyden zu messen.

Wären A und B die beyden Objecte, so nehme man in C einen Standpunct und eine Standlinie C D, visiere nach A, B und D, und trage C D nach dem verjüngten Maße von c in d. Nun nehme man zwischen B und D, z. B. in E einen willkührlichen Punct, visiere von c nach e. Messe C E, und trage ihr verjüngtes Maß von c nach e. Wird jetzt die von d nach e gezogene Linie d e über e verlängert, bis sie die Visier-Linie c b in b schneidet, so ist der Punct b auf dem Tischchen der dem Puncte B auf dem Felde entsprechende. LIX.

Nun nehme man in der D A einen willkühr-lichen Punct F, welcher sich auch zugleich in der Linie C E befindet, was durch doppeltes Visieren von D nach A und von C nach E leicht geschehen kann, messe C F, trage ihr verjüngtes Maß von c nach f, ziehe d f, und verlängere sie, bis die Visier-Linie c A in a durchschnitten wird, so ist a der dem Puncte A entsprechende Punct, und es muß a b nach dem kleinen Maßstabe der A B nach dem Feldmaßstabe gleich seyn.

LX. 8. Es sey die Höhe A B eines Baumes zu bestimmen, so stecke man das Instrument e c f d, welches aus dem Stabe d c mit einem scharnierartig an demselben beweglichen Lineale e f besteht, vertical in den Boden, drehe das Lineal so lange, bis man über die Kante f e genau die Spitze A erblickt. Ist dieses, so visiere man auch von e über f, und bemerke den in dieser Richtung auf dem Boden liegenden Punct G.

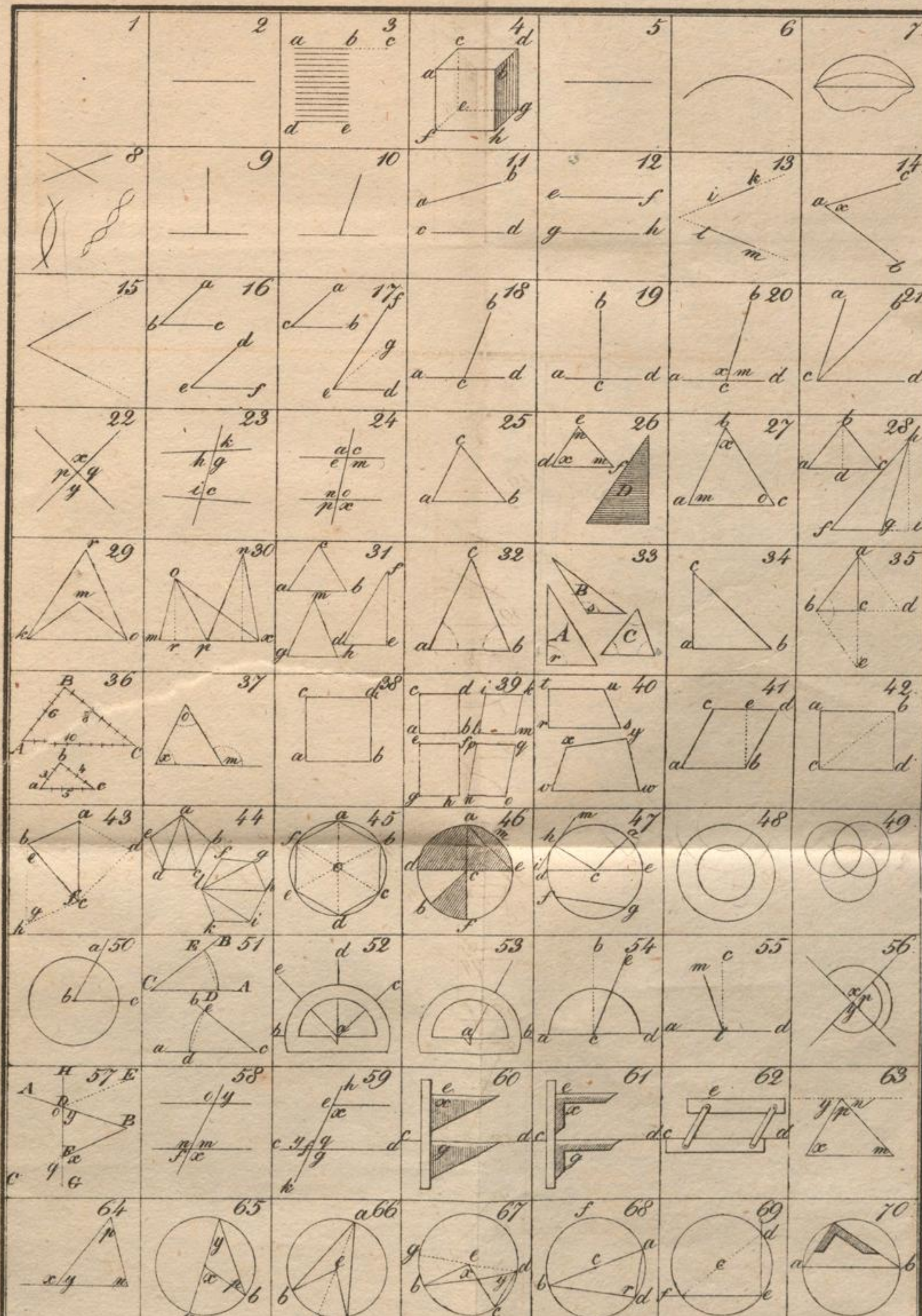
Hier ist klar, daß die rechtwinkeligen Dreyecke G d c und G B A einander ähnlich sind. Daher ist G D : D C = G B : B A, und aus den, dem Maße nach bestimmten drey ersten Gliedern dieser Proportion wird das vierte durch leichte Rechnung gefunden.

LXI. 9. Auch kann diese Aufgabe durch Hülfe des Schattens mit ziemlicher Genauigkeit aufgelöset werden.

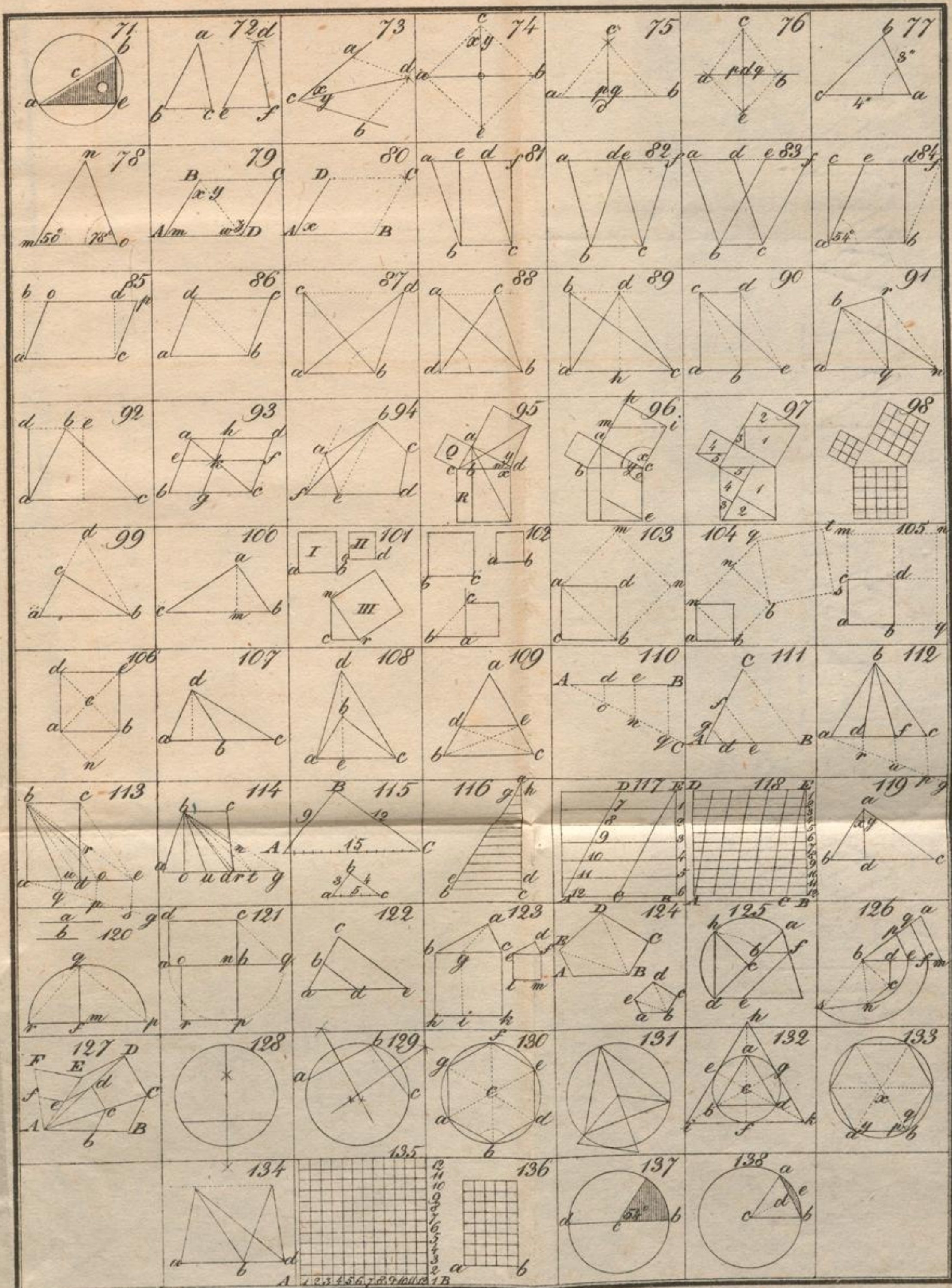
Es sey A B der zu messende Gegenstand, in s befinde sich die Sonne, so wird B N die Länge seines Schattens auf der Ebene M N seyn. Wird nun ein Stab C D von bekannter Länge dergestalt vertical in den Boden gesteckt, daß die Gränze seines Schattens D N in N mit der Schattengränze B N zusammen trifft, so sind die Dreyecke N D C und N B A einander ähnlich, und es verhält sich N D : D C = N B : B A. Da nun die Größe der drey ersten Glieder bestimmt werden kann, so ist es leicht, jene von B A zu berechnen.

10. Denkt man sich unter D C einen auf der Ebene vertical stehenden Stab von bekannter Länge, und unter N das Auge eines auf dem Rücken liegenden Menschen, welcher über C gerade die Spitze A erblickt, so entstehen wiederum die ähnlichen Dreyecke N D C und N B A, worin sich, wie vorhin, N D : D C = N B : B A verhält, und wodurch B A wieder leicht bestimmt werden kann.

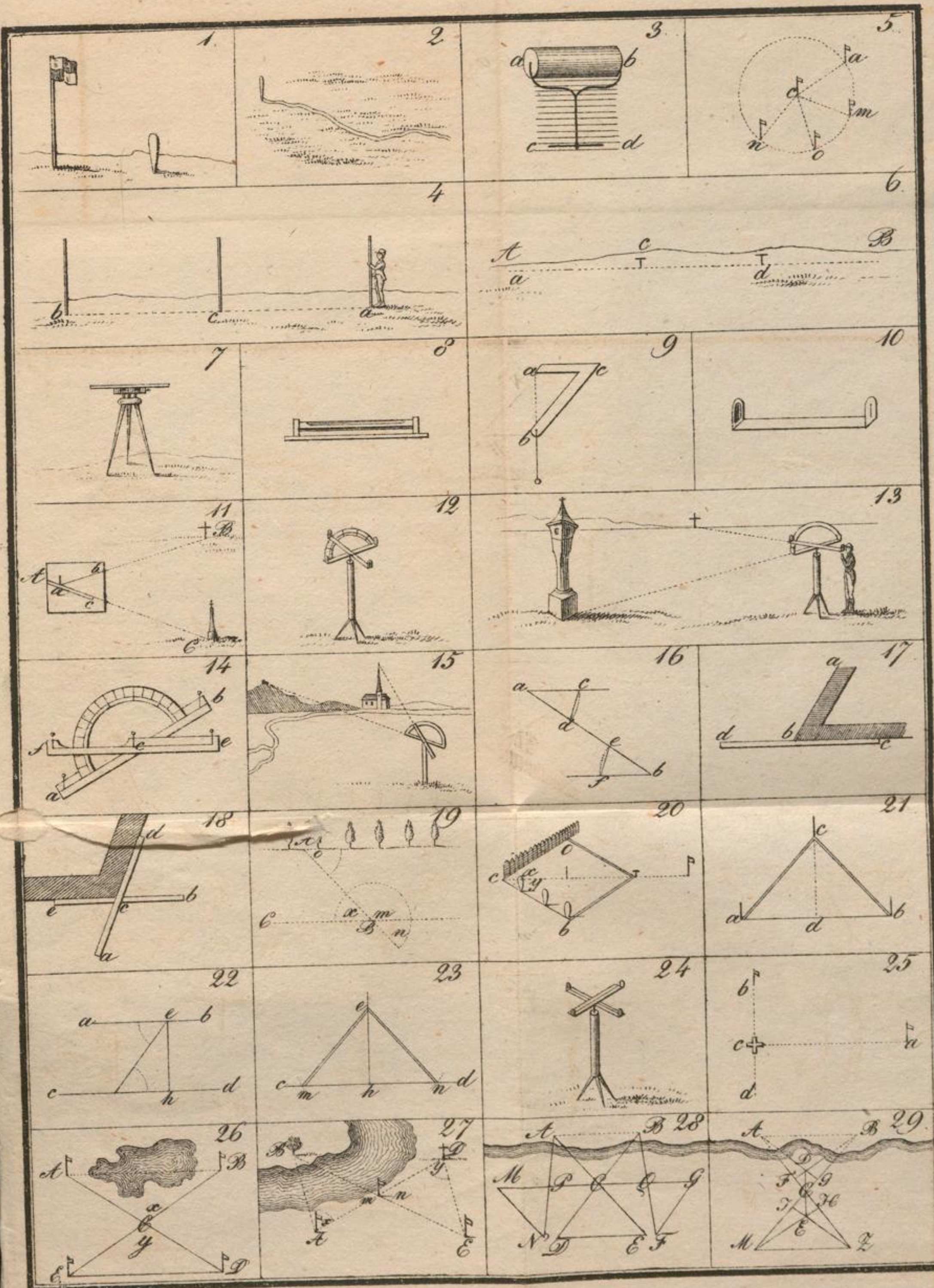
Tab. I.


1 2 3 4 5 6 7
8 9 10 11 12 13 14
15 16 17 18 19 20 21
22 23 24 25 26 27 28
29 30 31 32 33 34 35
36 37 38 39 40 41 42
43 44 45 46 47 48 49
50 51 52 53 54 55 56
57 58 59 60 61 62 63
64 65 66 67 68 69 70

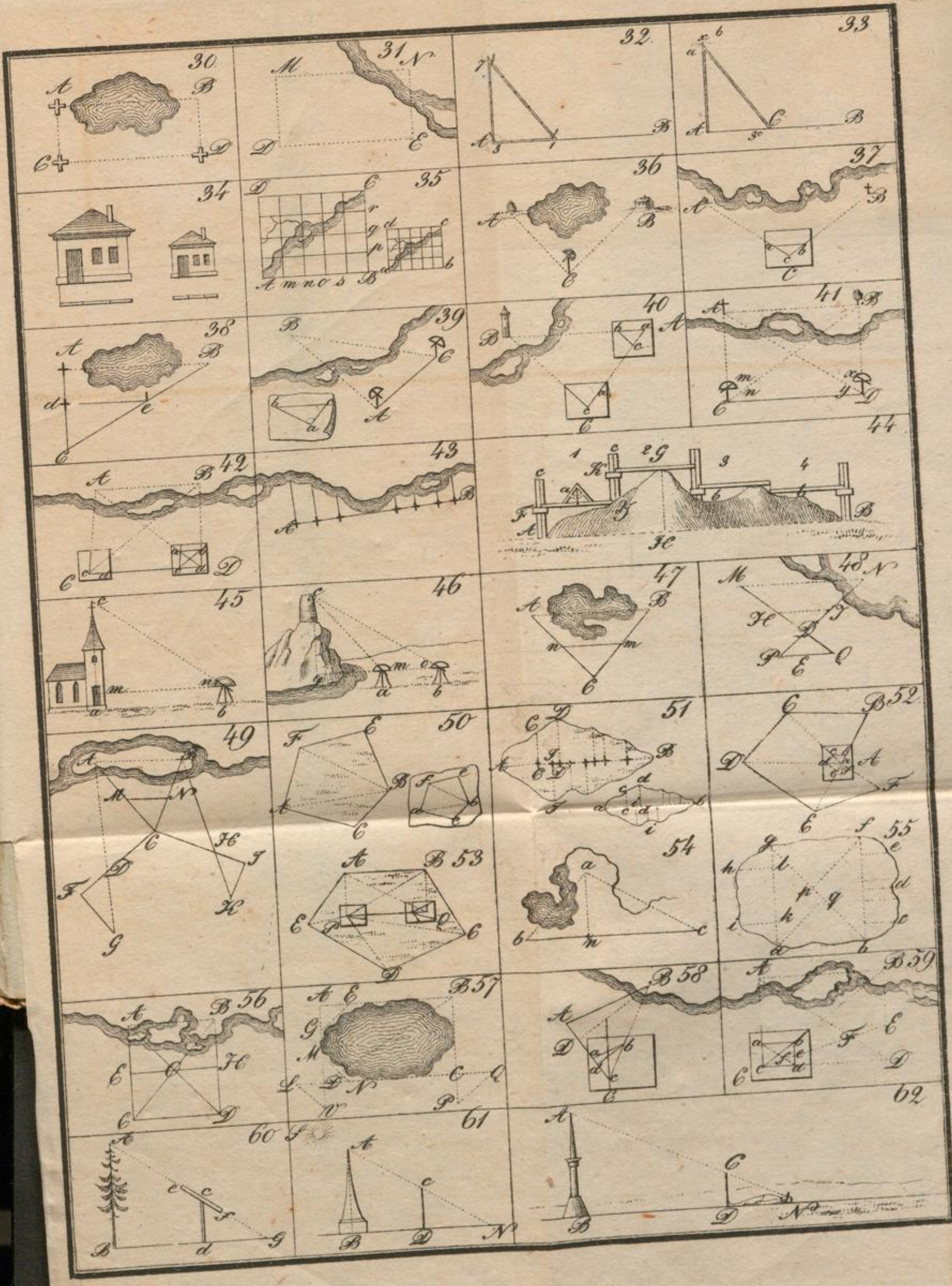
Tab. II.


71 72 73 74 75 76 77
78 79 80 81 82 83 84
85 86 87 88 89 90 91
92 93 94 95 96 97 98
99 100 101 102 103 104 105
106 107 108 109 110 111 112
113 114 115 116 117 118 119
120 121 122 123 124 125 126
127 128 129 130 131 132 133
134 135 136 137 138

Tab. III.



Tab. IV.


30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62

la7H