61

DES

FREYHERRN VON METZBURG,

DER PHILOSOPHIE UND THEOLOGIE DOCTORS, UND ÖFFENTLICHEN, ORDENTLICHEN PROFESSORS DER MATHEMATIK AN DER HOHEN SCHULE ZU WIEN,

ANLEITUNG

ZUR

MATHEMATIK.

NACH

DER VIERTEN LATEINISCHEN AUSGABE

ÜBERSETZT

VON

X. G. A.

ERSTER THEIL.

ARITHMETIK UND ALGEBRA.

ZWEYTE VERBESSERTE AUFLAGE.

WIEN,

Bey Franz Joseph Rötzel, Buchhändler in der Singerstrasse.

MDCCLXXXXVIII.

VORREDE.

Wie unentbehrlich das Studium der Mathematik dem angehenden Philosophen sey, ist allgemein bekannt. Die heutige Physik steht mit den mathematischen Grundsätzen in so enger Verbindung, daſs man sich, ohne Kenntniſs der letzten, vergeblich einen Fortgang in der ersten versprechen würde. Daher wäre billig zu wünschen, daſs keiner die philosophischen Schulen beträte, der nicht schon vorher in den Anfangsgründen der Mathematik wohl unterrichtet ist. Denn die

Art zu studiren, die Strenge im Beweisen, die Geschicklichkeit, verborgene Wahrheiten zu erforschen, und die Kunst, aus festen und bleibenden Grundsätzen eine Menge Folgerungen abzuleiten, dieſs alles erlangen wir durch das Studium der Mathematik, und können es dann auf andere Gegenstände mit leichter Mühe anwenden. Das einzige, wie eine lange Erfahrung mich belehret, was selbst denjenigen, die sich mit einem auch noch so groſsen Eifer zu diesem Studium begeben, im Wege stehet, ist, daſs sie sich von jeder Schwierigkeit, die ihnen aufstöſst, abschrecken laſsen; wodurch sie entweder den Muth gänzlich verlieren, oder das Lästigere übergehen, und zu dem Folgenden eilen, in der Erwartung, dort mehr Licht und weniger Arbeit zu treffen. Ich habe daher, bey dem Entwurfe dieser Anfangsgründe, die Methode, welche mir die leichteste schien, gewählet, die vorkommenden Sätze durch mehrere Beyspiele erläutert, und auch alles, was dunkel oder schwer scheinen könnte, durch viele erklärende Anmerkungen zu heben gesuchet, so daſs ich sicher hoffen darf, mit dieser Anleitung werde jeder, auch ohne andere Beyhilfe, alle Schwierigkeiten überwinden, und die Wahrheit der Sätze einsehen. Sollte doch jemand hier und dort einen Anstand finden, so will ich überhaupt dieses erinnert haben, daſs er ja nicht weiter schreite, bis er das Vorhergehende wohl gefaſst hat. Denn die Lehrsätze hängen, wie die Glieder einer Kette, aneinander, wovon eines das andere in fortlaufender und ununterbrochener Reihe aufnimmt; wird nur ein einziger Satz übergangen, so werden die übrigen immer dunkler, immer verwickelter, und der Weg ist endlich zu allem weiteren Fortgange gehemmet; zu dem *hat gleich Jemand*, sagt Cicero, *die Grundregeln* *einer Kunst richtig gefaſst, so wird er doch, ohne sich darin geübt zu haben, nie etwas Erhebliches zu Stande bringen.* Jeder soll daher zur Erlangung dieser Kenntniſse so viel Fleiſs anwenden, daſs er, den Griffel oder die Kreide in der Hand, sich stets auf der Tafel übe, die vorkommenden Beyspiele selbst ausarbeite, und nach dem Muster derselben neue zu ersinnen trachte; er soll endlich fest überzeugt seyn, daſs sein Fortgang immer der Verwendung entsprechen werde.

VORERINNERUNGEN.

I.

Mathematik heisst die Wissenschaft von Grössen, das ist, von allen denjenigen Dingen, welche durch Hinzusetzen vermehret, oder durch Wegnehmen vermindert werden können. Sie hat ihren Nahmen von dem griechischen μαθημα oder μαθησις (Unterweisung), welches Wort vorzugsweise zur Bezeichnung dieser Wissenschaft allein angenommen wurde.

II.

Jede Grösse kann auf zweyerley Art betrachtet werden; sie ist entweder eine *zerstreute*, oder eine *verbundene*; erstere enthält solche Theile, die von einander getrennet oder abgesondert bestehen, z. B. ein Kriegesheer, ein Haufen Sand oder Körner und dergleichen; letztere hingegen, deren Theile mit einander verbunden und vereiniget sind; diese ist wieder zweyfach, entweder eine *fortlaufende*, wenn die Theile auf einander folgen, und eines das andere aufnimmt, wie in der Zeit; oder eine *bleibende*, deren Theile beysammen und auf einmahl bestehen, wie in einem Stücke Eisen, und in jedem Körper. Mit den zerstreuten Gröſsen beschäftiget sich die *Arithmetik*, welche ihre Gegenstände durch Zahlen erkläret; die verbundenen Gröſsen hingegen sind das Geschäft der *Geometrie*, welche ihre Gegenstände durch Figuren bestimmet.

III.

Die Mathematik wird insgemein in die *reine* oder *abgesonderte*, und in die *gemischte* oder *angewandte* eingetheilet. Jene betrachtet die Gröſsen bloſs als Gröſsen, ohne die Grundsätze auf sinnliche Gegenstände, oder nicht ganz entschiedene Behauptungen anzuwenden, z. B. wenn ich eine Linie von 10 Klaftern bloſs als eine Länge betrachte. Die gemischte ist die Wissenschaft einer schon mit sinnlichen und physischen Gegenständen verwebten Gröſse, indem sie nähmlich ihre Grundsätze auf die Lehren der Physik anwendet, z. B. wenn die vorige lange Linie, zugleich als Entfernung zweyer Örter betrachtet wird. Die erstere ist in ihren Regeln die sicherste; die letztere ist zwar in Rücksicht ihrer arithmetischen Grundsätze, nicht aber auch in Rücksicht der physischen Eigenschaften gewiſs. Zur reinen Mathematik gehören die Arithmetik und Geometrie, zur gemischten die Mechanik, die Optik, und die Baukunst u. s. w.

IV.

Die Mathematiker beobachten im Vortrage ihrer Wahrheiten einen bestimmten Gang, und eine besondere Methode; da diese anfangs nur ihnen allein eigen war, so wird sie die mathematische Methode oder Lehrart genannt. Sie ist nichts anderes, als eine gewiſse Ordnung, in welcher die mathematischen Lehrgegenstände vorgetragen werden müſsen, und eine bestimmte und zweckmäſsige Reihe von Beweisen, wodurch eines mit dem andern genau verbunden wird. Sie bestehet also darin, daſs man von Erklärungen zu Grundsätzen oder Forderungen schreite, hierauf Lehrsätze oder Aufgaben baue, daraus Folgerungen ableite, und wo es erforderlich ist, einige Hypothesen und Anmerkungen beyfüge.

V.

Eine ERKLÄRUNG (*definitio*) ist eine deutliche Erörterung einer Sache oder eines Nahmens durch solche Begriffe, welche dieser Sache allein zukommen, und also diese von jeder andern Sache unterscheiden. Sie ist entweder eine *Nahmenerklärung*, wenn ein Nahme oder ein Wort erkläret wird; oder eine *Sacherklärung*, wenn eine Sache selbst, oder die Möglichkeit derselben, oder die Art ihres Daseyns erläutert wird. Begriffe aber heiſsen die Vorstellungen von Sachen, oder die in unserer Seele aufgestellten Bilder, welche man durch die verschiedenen Merkmahle der Dinge, oder durch die aus deren Entstehungsart und Wesenheit abgeleiteten Eigenschaften erhält. Diese Ideen müſsen so klar und deutlich seyn, daſs jeder ohne Anstand dasjenige verstehen könne, was vorgetragen wird. Von den mancherley Arten und dem Unterschiede der Ideen handelt die Logik.

VI.

Aus den Erklärungen fliefsen die *Grundsätze* (αξιωματα), das ist, so klare und einleuchtende Wahrheiten, dafs sie keiner von gesundem Menschenverstande verkennen könne, und die daher keines weiteren Beweises bedürfen, z. B. *das Ganze ist gröſser als ein Theil desselben.* Ein Lehrsatz (θεορημα) ist eine Wahrheit, welche zur Erwägung vorgetragen und bewiesen wird. Dieser bestehet aus zwey Theilen, nähmlich aus dem Satze, welcher die Wahrheit, wovon die Rede ist, vorträgt; und aus dem Beweise, welcher den nothwendigen Zusammenhang defselben mit einem oder mehreren Grundsätzen durch einen deutlichen Vernunftschlufs zeiget. Ein Lehrsatz ist also ein *theoretischer Satz, der erst bewiesen werden muſs;* ein Grundsatz ist ein *theoretischer Satz, der keines Beweises bedarf.* Der Beweis mufs entweder durch Gründe, die an sich selbst gewifs und einleuchtend sind, d. i. durch Erklärungen und Grundsätze, oder durch solche, welche durch die vorhergehenden schon befestiget sind, geführet werden; und auf diese Grundsätze mufs man sich immer, zur Hilfe des Gedächtnifses, und der Deutlichkeit halber, berufen, damit man sie in den vorhergehenden finden könne.

VII.

Eine AUFGABE (προβλημα) ist ein Satz, welcher etwas fordert, das geschehen soll, oder etwas anzeiget, das geschehen ist. Sie enthält drey Theile: 1) die Frage defsen, was geschehen soll, 2) die Auflösung der Frage, welche die Art zeiget, wie dafselbe geschehen soll; 3) den Beweis dieser Auflösung, z. B. *eine senkrechte Linie errichten.* Eine Aufgabe ist also eine *praktische Wahrheit, die erst bewiesen werden mufs.*

VIII.

Eine FORDERUNG (*Postulatum*), ist eine *praktische Wahrheit, die keines Beweises bedarf;* z. B. wenn man verlanget, dafs von einem Punkte zu dem andern eine gerade Linie gezogen, oder dafs eine gegebene Linie verlängert werde und dergleichen. Die praktische Ausführung dieser Forderungen ist so leicht und klar, dafs sie keines Beweises bedarf.

IX.

HYPOTHESEN (ὑποθεσεῖς) sind Dinge und Zeichen, oder andere willkührlich angenommene Figuren der Dinge, wie z. B. die Wörter, die Ziffern, die Schriftzüge zur Bezeichnung der Dinge gebraucht werden. In der Physik verstehet man unter Hypothese eine wahrscheinliche, nicht erwiesene Voraussetzung, welche, im Abgange besserer Kenntnifse von der Sache, angenommen wird. Daraus lafsen sich zwar sichere mathematische Wahrheiten ableiten, die aber von keinem gröfseren Gewichte sind, als der Grund selbst, auf den sie gebauet sind. Dergleichen sind in der Physik die kugelförmige Figur der Erde, die Schwerkraft u. s. w. In der Mathematik wird bisweilen etwas voraus gesetzt, oder unter gewifsen Bedingungen angenommen, daraus man Wahrheiten, welche diesen angenommenen Dingen eigen sind, ableitet, worauf man hernach einen

Lehrsatz gründet. So nehmen wir an, daſs zwey Linien gleichlaufend sind; und aus dieser Hypothese beweisen wir die Gleichheit der Wechselwinkel, wenn diese von einer dritten Linie durchschnitten werden; hieraus wird nun der Lehrsatz aufgestellet: *wenn die Wechselwinkel gleich sind, so sind die Linien gleichlaufend.* Man sagt: *einen bedingten Satz zu einem bestimmten machen*, wenn die Bedingung erfüllet, und folglich dasjenige, was vorhin unter einer Bedingung als wahr vorgestellet wurde, nun gerade hin ohne Bedingung behauptet wird.

X.

Ein LEHNSATZ (λημμα) ist ein Satz, der aus einer andern Wiſsenschaft gleichsam entlehnet, und durch welchen nun etwas bewiesen wird, das der Grund eines weiteren Beweises seyn soll.

XI.

Eine ERFAHRUNG (*Experientia*) ist die Erkenntniſs, welche wir durch Beobachtung der in die Sinne fallenden Dinge erlangen, z. B. daſs die Sonne leuchtet, daſs die Körper schwer sind, daſs die Mondesfinsterniſs durch den Schatten entstehet. Hieraus kann man also die Beweise für einzelne Gegenstände ableiten, und dieselben hernach auf allgemeine Wahrheiten anwenden, wenn mehrere solche Gegenstände mit einander übereinstimmen, und immer die nähmliche Art und Weise befolgen. Bereiten wir uns selbst die Gegenstände zu dergleichen Beobachtungen, oder Wirkungen, so nennen wir dieſs, *Versuche an-*

stellen, *Erfahrungen oder Experimente machen*, z. B. von der Bewegung und dem Zusammenstoſsen der Körper, von dem Falle der Körper u. s. w.

XII.

FOLGERUNGEN (*Corollaria*) sind Wahrheiten, welche aus erwiesenen Wahrheiten von selbst flieſsen, und keines neuen Beweises nöthig haben; sie sind also besondere Fälle, welche in jenen allgemeinen Sätzen schon enthalten sind, oder sehr leicht zu denselben gezogen werden können.

XIII.

Eine ANMERKUNG (σχολιον) ist eine Erinnerung, welche man irgend einem bereits vorgetragenen Satze anhängt. Dadurch wird entweder die Wahrheit noch deutlicher dargestellet, oder ein Zweifel gelöset, oder etwas Paſsendes aus der Geschichte, von den Verfaſsern, Erfindungen, und überhaupt von solchen Gegenständen angeführet, die weder unnütz noch unangenehm seyn dürften.

XIV.

Wer also von der mathematischen Lehrart Gebrauch machen will, der befolge diese Gesetze so genau und strenge, daſs er in keinem Falle davon weiche. Diejenigen sind also nicht recht daran, welche sich dieser Lehrart nur hier und da, wo es ihnen füglich scheinet, bedienen, oder bloſs die hier erklärten Wörter und die Berufungen darauf, in ihre Bücher aufnehmen, ohne sich um die Sache selbst zu bekümmern, oder welche willkührliche Erklärungen voraus schicken, und darauf nach ihrem Dünkel unumstöſsliche Behauptungen bauen, die, da die Grundfeste, worauf sie ruhen, schwach ist, einstürzen müſsen. Man wähle also solche Erklärungen, welche die Sache so klar und deutlich darstellen, daſs niemand daran zweifeln könne. Man bediene sich dazu schon angenommener Wörter, und sind etwa neue anzuwenden, so muſs man diese genau erklären, damit nicht ein verschiedener Sinn entstehe, welcher der Sache einen andern Begriff, und eine irrige Vorstellung geben könnte, wodurch die zu untersuchende Wahrheit in ein eitles Wortgezänk ausarten würde.

XV.

Aus solchen einmahl fest gesetzten Erklärungen und Grundsätzen kann man nun die zur Überlegung oder Ausübung vorgelegten Wahrheiten, ableiten, derer Beweise abermahl mit aller Strenge zu führen sind. Die Schluſsfolge muſs nicht anders als aus vorausgeschickten deutlichen Sätzen, die schon bekannt und vorher bewiesen worden sind, und die man durch Anführungen der Stellen ins Gedächtniſs zurück bringet, nach den Regeln der Logik gemacht werden, so daſs keine Verneinung mehr Statt finde; und dann endlich kann man mit Sicherheit dem Schluſse beysetzen: *Was zu beweisen war*, *oder was aufzulösen war*, mit welchen Formeln die Lehrsätze und Aufgaben gewöhnlich geschlossen werden.

XVI.

Auf dieses gründet sich auch die Wahrheit der Folgerungen, derer sich oft sehr viele aus einem einzigen Lehrsatze, nicht ohne Nutzen und Vergnügen der Leser, ableiten lassen. Die angehängten Anmerkungen bereichern die gelehrten Kenntnifse und heben das Eckelhafte, welches aus der trockenen Untersuchung der Wahrheiten entstehen könnte. Wer sich dieser Methode in was immer für einer Wifsenschaft, so wohl im Lehren als im Lernen, bedienet, der wird sicher die gröfsten Früchte seiner Bemühung einärnden, und sich die nöthige Geläufigkeit erwerben, andere Wahrheiten zu erfinden und deutlich vorzutragen.

XVII.

Auch von der *Auflösung* und *Zusammensetzung* haben wir noch etwas zu sagen, welche beyde gleichsam der Weg sind, auf welchem wir nach der vorgeschriebenen Methode Unterricht nehmen und geben. Die AUFLÖSUNG (αναλυσις) ist eine gewifse Methode, deren wir uns zur Entdeckung der Wahrheit bedienen. Bey dieser geschieht der Übergang von einer bestimmten einzelnen Wahrheit zu einer andern unbestimmten, oder zu allgemeinen Grundsätzen, und so steigen wir sogar bis zu dem Ursprunge unserer Begriffe hinauf. Die vorgelegte Wahrheit wird nähmlich in ihre Theile und Glieder aufgelöset und entwickelt, wie dieses schon aus der Bedeutung des Wortes erhellet. So pflegen die Mathematiker aus der Vergleichung, welche das Bekannte zu etwas Unbekannten hat, mittels der auflösenden oder analytischen Methode die unbekannte Grösse selbst zu erforschen. Sie verwirft alle schwankenden und ungewiſsen Grundsätze und strebet nach der gröſsten, nur erdenklichen Genauigkeit und Bestimmtheit.

XVIII.

Die ZUSAMMENSETZUNG (συνθεσις) ist der vorigen Methode entgegen gesetzt; denn sie steiget von allgemeinen Wahrheiten zu einzelnen herab, beweiset diese durch schon angenommene Grundsätze, und andere solche Sätze, die schon vorhin als gewiſs und ungezweifelt behauptet worden sind, und so gehet sie durch eine ununterbrochene Reihe von Wahrheiten zur Schluſsfolge über. Beyde Methoden schreiten nähmlich stufenweise von den ersten Grundsätzen, von dem ächten Sinne und der Erklärung des Wortes zur Wahrheit selbst, welche sie mit festen Beweisen einkleiden, und in ihrem ganzen Lichte darstellen. Obgleich nun beyde von sehr groſsem Nutzen sind, so verdienet doch die Zusammensetzung bey dem Unterrichte in den Wiſsenschaften den Vorzug, da hingegen die Auflösung bey der Forschung und Erfindung der Wahrheiten den ersten Platz behauptet.

XIX.

Man pflegt diese beyden Methoden durch ein aus der Genealogie entlehntes Beyspiel zu beleuchten. Damit ich die unbekannte Reihe irgend eines Stammes z. B. des Cäsars finde, mache ich von dem Cäsar selbst den Anfang, dann steige ich in gerader Linie zu deſsen Vater, Groſs-vater, Urgroſsvater und weiter hinauf, bis ich zu dem Haupte dieses Geschlechtes, oder Stammvater komme, nach welchem ich geforscht habe. Ungefähr auf diese Art gehet man bey der Auflösung zu Werke, wenn es um die Entdeckung einer Wahrheit zu thun ist. In der zusammensetzenden oder synthetischen Methode fange ich von dem schon bekannten Stammvater an, und steige dann zu deſsen Sohne, Enkel, Urenkel und weiter herab, bis ich endlich die Reihe der Geschlechtsfolge bey dem in der Frage stehenden Cäsar schlieſsen kann. Daſs sich auf diesem Wege eine Wahrheit am besten erklären lasse, sieht jedermann ein. So verfahren wir bey philosophischen Gegenständen *synthetisch*, wenn gleich anfangs eine Wahrheit vorgetragen wird, die nach den angeführten Gesetzen zu beweisen ist; *analytisch* hingegen, wenn wir von bekannten Wahrheiten immer weiter schreiten, bis wir unvermerkt auf eine auch unbekannte Wahrheit verfallen. Dort wird der Lehrsatz gleich anfangs, hier aber am Ende, nach schon bewiesener Sache, aufgestellet. Bey jener wird der Zuhörer vorbereitet, und zum Empfange einer unbekannten Wahrheit aufmerksam gemacht; bey dieser kommen wir auf eine Wahrheit, ohne daſs man vorher wuſste, wovon wir handeln würden.

XX.

Die Grundsätze, worauf die Mathematik vorzüglich beruhet, sind folgende:

I. Das Ganze ist gröſser als ein Theil davon.

II. Das ganze ist allen seinen Theilen zusammen genommen gleich.

III. Dinge, die einem dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich; Dinge, die gleichen Dingen gleich sind, sind auch unter sich gleich.

IV. Wenn gleiche Dinge zu gleichen addiret werden, so sind die Summen gleich; oder wenn gleiche Dinge von gleichen subtrahiret werden, so sind die Reste beyderseits gleich.

V. Gleiche Dinge können für gleiche gesetzt werden.

ANFANGSGRÜNDE DER MATHEMATIK.

I. HAUPTSTÜCK.

ALLGEMEINE BEGRIFFE VON DER ARITHMETIK ODER ZAHLENRECHNUNG.

I. ERKLÄRUNG.

1. Die *Arithmetik* (αϱιϑμητικη nähmlich τεχνη) lehret die Theile einer zerstreuten Gröſse §. II. zusammen setzen und von einander trennen; da beydes durch Zahlen geschieht, so heiſst sie daher, wie im Griechischen, die *Zahlenkunst*, oder *Rechenkunst*, *Zahlenrechnung*.

II. ERKLÄRUNG.

2. Eine *Zahl* ist eine Menge von Individuen, oder Theilen, die zu einerley Art gehören, und in Rücksicht dieser Zahl werden diese Individuen oder Theile, Einheiten genannt. Enthält

ein solcher Theil wieder Individuen in sich, so ist er in Ansehung seiner Individuen abermahl eine Zahl, und seine Individuen sind Einheiten.

III. ERKLÄRUNG.

3. Eine *Einheit* ist jede Gröſse, an und für sich betrachtet; sie ist also das Element oder der Anfang einer Zahl. Denn da die Einheit als ein Theil, und die Zahl als ein Ganzes oder eine Sammlung der Theile betrachtet wird, so kann eine Einheit nicht eine Zahl, sondern nur der Anfang derselben seyn, gleich wie auch ein Theil nicht das Ganze, sondern nur der Anfang des Ganzen seyn kann. Dieser Begriff hindert aber nicht, daſs nicht eine und eben dieselbe Einheit, nach verschiedener Rücksicht, auch eine Zahl seyn könne. Denn gleichwie ein Theil in Ansehung seiner kleineren Theile ein Ganzes ist, so ist auch eine Einheit in Ansehung ihrer Einheiten, die sie enthält, eine Zahl. So sind die Bataillone in Rücksicht des Regiments, die Compagnien in Rücksicht des Bataillons, die Züge in Rücksicht der Compagnie, Einheiten; und jeder Soldat ist eine Einheit in Rücksicht des Zuges. Es kann also eine und eben dieselbe Gröſse zugleich eine Einheit, und eine Sammlung der Einheiten seyn; aber nur in verschiedener Rücksicht.

I. FOLGERUNG.

4. Eine Zahl entstehet also, wenn Einheit zu Einheit, z. B. eine Kugel zu einer Kugel, gesetzt wird; setzt man wieder eine Kugel hinzu, so wächst die Zahl, und dieſs so lange, als Einheiten und Theile zusammen gesetzt werden. Nimmt man hingegen von mehreren eine Einheit weg, so vermindert sich die Zahl und wird immer kleiner, je mehr

Theile weg genommen werden; nur diese zwey Veränderungen einer Größe sind der Gegenstand der Arithmetik. (§. 1.)

II. FOLGERUNG.

5. Damit man aber Einheit zu Einheit setzen und eine Zahl bilden könne, so müßen es Dinge von einerley Art seyn; denn es ist nicht möglich, daß aus verschiedenen Einheiten oder Theilen eine Sammlung oder ein Ganzes werde; z. B. ein Haus, ein Pferd, ein Soldat, eine Kugel, ein Apfel, können nicht gesammelt werden, und folglich keine Zahl oder kein Ganzes ausmachen. Drey Äpfel und vier Birnen, sind weder sieben Äpfel, noch sieben Birnen: aber als Früchte betrachtet, sind sie sieben Früchte. Theile von einerley Art heißen *gleichnahmige* oder *gleichartige*; Theile von verschiedener Art *ungleichnahmige* oder *ungleichartige*.

ANMERKUNG.

6. Die Einheiten, als Theile betrachtet, sind auch in der verbundenen Größe anwendbar. So werden Linien gemessen, wenn man eine Linie, als Einheit betrachtet, zum Maße nimmt. So werden Flächen durch Flächeneinheiten, und Körper durch Körpereinheiten gemeßen.

III. FOLGERUNG.

7. Wenn Einheiten oder Zahlen zusammen gesetzt werden, so kann diese Zusammensetzung auf zweyerley Art geschehen; entweder, daß man verschiedene und mehrere Zahlen gleichnahmiger Einheiten in ein Ganzes zusammen zählet, z. B. sechs, zwanzig, hundert, tausend; oder, daß man die nähmliche Zahl einige Mahle setzet, z. B. sechs, sieben Mahl genommen; die erste Art der Zusammensetzung heißt *Addition*; die zweyte, welche eigentlich eine Abkürzung oder ein Compendium der erstern ist, *Multiplication*.

IV. FOLGERUNG.

8. Wenn Zahlen weg genommen werden, so kann dieses wieder auf zweyerley Weise geschehen, entweder daſs man eine kleinere Zahl von der gröſseren ein Mahl wegnimmt, z. B. die Zahl vierzig von hundert; oder daſs man die nähmliche kleinere Zahl einige Mahle von der gröſseren abzieht, z. B. vier, drey Mahl von der Zahl zwölf; jenes heiſst *Subtraction*, dieses, welches wieder eine Abkürzung des erstern ist, *Division*.

I. HYPOTHESE.

9. Diese vier Arten nennet man die *arithmetischen Species*, oder *Rechnungsarten*, welche sich, im engen Verstande, bloſs auf die Addition und Subtraction zurück führen laſsen, da die zwey übrigen eigentlich nur Abkürzungen der ersteren sind; weil jedoch auch von diesen besondere Regeln gegeben werden, so nimmt man gewöhnlich vier Rechnungsarten an: die *Addition, Subtraction*, *Multiplication* und *Division*. Die Rechenmeister zählen auch die *Numeration* unter diese Rechnungsarten, und machen also fünf *arithmetische Species;* da aber die Numeration keine Veränderung mit der Gröſse vornimmt, sondern nur die Zahlen lesen, aussprechen, oder niederschreiben lehret, so ist es eine nöthige vorausgesetzte Kenntniſs oder Vorbereitung, keineswegs aber eine Rechnungsart.

I. ANMERKUNG.

10. Für die Einheiten, und die hieraus mittels der Addition entstehenden Zahlen hat man verschiedene Zeichen erfunden, um eine, zwey, drey, vier und mehrere Einheiten mit einander zu verbinden, und verschiedene Summen auszudrücken. Die meisten morgenländischen Völker brauch-

ten dazu die Buchstaben des Alphabeths, und brauchen sie noch, wie die Griechen, α, β, γ, δ, u. s. w. in der natürlicheu Ordnung; die Lateiner aber wählten nur einige Buchstaben aus dem Alphabethe, nähmlich C, D, I, L, M, V, X. In Europa sind die so genannten arabischen Ziffern üblich, und fast von allen Nationen angenommen. Es sind folgende:

1	2	3	4	5	6	7	8
eins	zwey	drey	vier	fünf	sechs	sieben	acht

9	0
neun	Nulle,

welches letztere Zeichen den Mangel einer Einheit, oder was immer für einer Zahl anzeiget.

ANMERKUNG.

11. Daſs die Auswahl dieser Zeichen willkührlich sey, beweiset der tägliche Gebrauch der Kaufleute, welche den bestimmten Preis ihrer Waare durch verschiedene Zeichen auf derselben anmerken. Einige wählen für die Zahl der Gulden die groſsen, für die Zahl der Kreuzer die kleinen Buchstaben des Alphabeths; andere verwechseln die oben angeführten arabischen Zeichen mit neun verschiedenen Buchstaben, z. B.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
g	m	o	l	b	r	i	s	d	e

Diese würden also das Wort *Gold* durch 1349; das Wort *Silber* durch 874506 ausdrücken.

Saunderson, ein berühmter engländischer Mathematiker, hatte es durch Übung dahin gebracht, die Zahlen durch fühlbare Zeichen auszudrücken, uud auf solche Art den Mangel seines Gesichtes zu ersetzen. Denn schon im zweyten Jahre seines Alters verlor er durch die Pocken das Augenlicht, und da er nach zurückgelegten humanistischen und philosophischen Studien, vorzüglich für die Mathematik eingenommen blieb, so ersann er sich Tabellen, die ihm statt der Ziffern dienen, und jede Zahl bedeuten sollten. Durch dieses Hilfsmittel ward er in den Stand gesetzt, daſs er auf der Vniversität zu Cambridge durch 20 Jahre die Mathematik mit groſser Bewunderung und allgemeinem Beyfalle lehrte. Die Gestalt dieser Tabellen enthält die I. Figur; der Durchschnitt der drey geraden Linien ist durchlöchert, um anf solche Weise neun Löcher zu haben, in welche man hölzerne Nägel von verschiedener Gröſse stecken kann. Der gröſsere Nagel in der Mitte bedeutet Nulle; ein kleinerer, in das unmittelbar obere Loch gesteckt, bedeutet 2; nimmt man diesen weg, und setzt ihn oben zur Rechten, so bedeutet er 3; und so fort bis zu 9. Rings um den groſsen Nagel werden die kleineren gesteckt, und bekommen nach demselben ihre Richtung; die Einheit wird durch einen kleineren Nagel, der allein in der Mitte stehet, angedeutet. Die Tabellen selbst können an einander gefüget werden, und gleichsam nur eine Tabelle ausmachen, wie die II. Figur darstellet.

II. HYPOTHESE.

12. Damit man aber durch die erwähnten arabischen Ziffern, obgleich deren nur neun sind, dennoch jede, auch noch so groſse Zahl ausdrücken könnte, so suchte man ihnen auch, nach ihrer verschiedenen Stellung, den Werth zu bestimmen. Es werden nähmlich in der Zahlenreihe von der Rechten zur Linken die Stellen gezählet; eine Ziffer, welche an der ersten Stelle, oder ganz allein stehet, bedeutet Einheiten; die Ziffer an der zweyten Stelle zur Linken, bedeutet Zehner; die an der dritten Stelle, Hunderter; z. B. die Ziffern 536 drücken die Zahl fünfhundert, dreyſsig, sechs, aus, weil 5 an der dritten Stelle der Hunderter, 3 an der zweyten Stelle der Zehner, und 6 an der ersten Stelle der Einheiten stehet. Auf solche Art drücken wir jede Zahl bis auf tausend aus; und diese drey Zifferstellen führen

wir auf eine Claſse der einfachen Zahlen zurück. Kommen wir nun im Zählen auf tausend, so haben wir schon die vierte Stelle nöthig, und fangen also die zweyte Claſse, das ist, die Claſse der Tausender an, in welcher wir wieder Einheiten, Zehner, und Hunderter haben, aber nicht mehr von einfachen, sondern von jenen Zahlen, welche drey Zifferstellen von Tausendern enthalten, und so wird in dieser Claſse die erste Zahl abermahl die Einheiten, die zweyte die Zehner, und die dritte die Hunderter der Tausender bedeuten. Wenn man also den obigen drey Zahlen folgende drey 473 vorsetzet, so ist die ganze Zahl 473536, nähmlich: vierhundert, siebenzig drey tausend, fünfhundert, dreyſsig, sechs. Auf diese zwey Claſsen, nähmlich der einfachen Zahlen, und jener der Tausender, folget die dritte Claſse der Millionen, in welcher wieder drey Zifferstellen die Einheiten, Zehner und Hunderter von Millionen bedeuten. Und so ist in einer Zahlenreihe von mehr als sechs Ziffern, die siebente Ziffer die Stelle der Einheiten von Millionen, die achte der Zehner von Millionen, und die neunte der Hunderter von Millionen, daſs also die Zahl 819473536 auf folgende Art ausgesprochen wird: achthundert, neunzehn Millionen; vierhundert, drey und siebenzig tausend; fünfhundert, sechs und dreyſsig. Wenn man so fortrücket, und der vorigen Zahl immer eine neue Claſse von drey Ziffern vorsetzet, so werden in der vierten Claſse die Einheiten, Zehner und Hunderter von Tausendern der Millionen enthalten seyn; in der fünften Claſse die Einheiten, Zehner und Hunderter von Billionen; in der sechsten von Tausendern der Billionen; in der siebenten von Trillionen, und so ins Unendliche fort. Diese neun Ziffer können demnach allein hinreichen, um jede denkbare Zahl auszudrücken. Doch ist zu bemerken, daſs die letzte Claſse auch nur eine oder zwey Ziffer enthalten könne.

ANMERKUNG.

13. Damit aber jede Ziffer ihren gehörigen Platz einnehmen könne, wenn gleich keine vorhanden ist, welche die Plätze der vorhergehenden ausfüllete, so brauchet man Nullen, die bloſs dazu dienen, daſs sie die leeren Stellen besetzen, und so die Ziffer oder Zahl an ihre gehörige Stelle befördern. Will man z. B. zweytausend schreiben, so muſs, nach der erwähnten Voraussetzung die Ziffer 2 die vierte Stelle einnehmen; und die erste, zweyte und dritte Stelle werden mit Nullen ausgefüllet. So wird, um zehn auszudrücken, die Einheit an die zweyte Stelle gesetzt; also muſs die erste Stelle mit einer Nulle ausgefüllet werden. Will man vierhundert und acht schreiben; so wird, weil hier nur Hunderter und Einheiten vorkommen, die Abwesenheit der Zehner durch eine Nulle ausgedrückt, nähmlich 408; und so bey den übrigen; überhaupt, jede leere Stelle wird durch eine Nulle besetzt. Der Werth der Zifferstellungen wird durch folgende Tabelle dargestellt.

7 Claſse.	6 Claſse.	5 Claſse.	4 Claſse.	3 Claſse.	2 Claſse.	1 Claſse.
Einheiten, Zehner, Hunderter von Trillionen	Einheiten, Zehner, Hunderter von Tausendern der Billionen	Einheiten, Zehner, Hunderter von Billionen	Einheiten, Zehner, Hunderter von Tausendern der Millionen	Einheiten, Zehner, Hunderter von Millionen	Einheiten, Zehner, Hunderter von Tausendern	Einheiten, Zehner, Hunderter von einfachen Zahlen

I. AUFGABE.

14. Jede gegebene Zahl aussprechen.

AUFLÖSUNG.

Man theilet die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Claſsen, jede Claſse zu drey Ziffern, welche die Einheiten, Zehner und Hunderter enthalten; die Abtheilung kann durch Beystriche (,) geschehen.

Alle Claſsen der Tausender bezeichnet man oben mit einem Puncte (·), die Claſsen der Millionen mit einem Strichlein (′), jene der Billionen mit zwey (″), jene der Trillionen mit drey (‴) u. s. w. Auf solche Weise wird man für die Einheiten, Zehner und Hunderter die schicklichen Ausdrücke haben. Wo also ein Punkt vorkommt, spricht man *Tausend;* wo ein Strichlein ist, *Million;* wo zwey sind, *Billion;* und wo drey sind, *Trillion*, u. s. f.

BEWEIS.

Der Werth der Ziffern hängt von der Stelle ab, auf welche sie zu stehen kommen (§. 12.); durch diese in der obigen Auflösung gegebene Zeichen wird der Werth der Zifferstellungen ausgedrückt, und kann also auch richtig ausgesprochen werden.

Zum Beyspiele: es sey die Zahl 5302480693.

Man theilet diese Ziffern nach den Regeln in Claſsen, und gibt ihnen die vorgeschriebenen Zeichen.

5·,302′,480·,693

Fünftansend, dreyhundert (hier ist kein Zehner), zwey Millionen, vierhundert achtzig (hier ist keine Einheit) tausend, sechshundert, drey und neunzig.

ANMERKUNG.

15. Nach diesen Regeln wird man folgende Zahlen leicht aussprechen können:

I. Sardanapals Schätze sollen betragen haben 573200275757 Kronen.

II. Der körperliche Inhalt der Sonne beträgt 3645252928246960 Meilen.

III. Der König Schehram war dem Erfinder des Schachspieles vermöge eines Vertrages schuldig 18446744073709551615 Weizenkörner.

II. AUFGABE.

16. Eine mündlich gegebene Zahl schreiben.

AUFLÖSUNG.

I. Man sehe, ob die gegebene Zahl Millionen, Billionen u. dgl. enthalte; ob sie von diesen unmittelbar, oder von tausend anfange; dann unterscheide man so viele Claſsen durch Beystriche, als die Zahl nach der vorhergehenden Aufgabe fordert.

II. Zwischen diese Beystriche schreibe man die Zahl dergestalt, daſs die Hunderter, die Zehner und die Einheiten ihren gehörigen Platz einnehmen, die leeren Stellen aber mit Nullen besetzet werden.

BEWEIS.

Der Werth der Ziffern hängt von den Stellen ab; auf solche Art aber werden die Ziffern an ihre gehörigen Stellen gesetzt, folglich auch nach ihrem Werthe geschrieben.

Zum Beyspiele: man soll schreiben: fünfzehn tausend, sechshundert und acht Millionen, vierhundert, sieben und zwanzig tausend, neun und achtzig.

Da in dieser Zahl Millionen vorkommen, so sind schon drey Claſsen nöthig, und da Tausender von Millionen voraus gehen, so muſs auch noch die vierte Claſse beygesetzt werden.

.   ′   .

,   ,   ,

in die vierte Claſse setzet man 15; in die dritte sechshundert, dann eine Nulle und acht, 608; in die zweyte 427; in die erste kommt Nulle, und 89, das ist:

15˙, 608′, 427˙, 089

ANMERKUNG.

17. Auf diese Weise werden folgende Zahlen geschrieben:

I. Der Umkreis der Erde, oder der gröſste Zirkel enthält zwanzig Millionen, zweyhundert sechs und fünfzig tausend Klafter.

II. Wenn man jedem Menschen 4 Quadratschuhe von der Oberfläche der Erde einräumte, so würden auf derselben tausend, fünfhundert, zwey und zwanzig Billionen, neunhundert, neunzehn tausand, vierhundert und fünf Millionen, zweyhundert und fünfzig tausend Menschen stehen können.

II. HAUPTSTÜCK.

VON DEN ARITHMETISCHEN RECHNUNGSARTEN.

I. ERKLÄRUNG.

18. Die *Addition* ist die Erfindung einer Zahl, welche mehreren gegebenen Zahlen gleich seyn muſs; sie ist also die Vermehrung einer Gröſse durch eine andere Gröſse, oder die Sammlung der Theile in ein Ganzes, welches denselben gleich ist. Die gegebenen Zahlen heiſsen *die zu addirenden Theile* (bey einigen auch *Posten*); die neue Zahl, welche dadurch entstehet, heiſst die *Summe*.

I. AUFGABE.

19. Gegebene Zahlen addiren.

AUFLÖSUNG.

I. Die zu addirenden Zahlen schreibet man so unter einander, daſs die Einheiten unter die Einheiten, die Zehner unter die Zehner, die Hunderter unter die Hunderter u. s. f. zu stehen kommen.

II. Unter diesen Zahlen ziehet man eine Querlinie, damit keine Irrung geschehe.

III. Dann zählet man die Einheiten zusammen; und läſst sich die Summe durch eine einzige Ziffer ausdrücken, so wird diese unter der gezogenen Linie an die Stelle der Einheiten geschrieben; kommen aber zwey Ziffer heraus, so schreibt man nur diejenige, welche zur Rechten stehen sollte; die zur linken hingegen zählet man zur folgenden Reihe der Zehner, indem sie wirklich den Werth der Zehner in sich hat; die Zehner zählet man wieder in eine Summe zusammen, und wenn diese abermahl aus einer einzigen Ziffer bestehet, so wird diese an ihren Platz geschrieben; bestehet sie aber aus zwey Ziffern, so wird nur die zur Rechten an die Stelle der Zehner gesetzt, die zur Linken aber zur folgenden Reihe der Hunderter gezählet. Geschieht nun das nähmliche auch mit den Hundertern, Tausendern und so fort durch alle Reihen, so erhält man die gesuchte Summe.

I. Beyspiel. Es seyen die Zahlen 342, 423, 1214 zu addiren.

I.	342	2 und 3 und 4 sind 9 Einheiten.
II.	423	4 und 2 und 1 sind 7 Zehner.
III.	1214	3 und 4 und 2 sind 9 Hunderter.
	1979	1 Tausender bleibt.

II. Beyspiel. Man addire die Zahlen 3564, 4878, 7345, 8596.

I.	3564	4 und 8 sind 12 und 5 sind 17 und
II.	4878	6 sind 23 Einheiten; also wird 3 an
III.	7345	die Stelle der Einheiten gesetzt, und 2
IV.	8596	zu den Zehnern gezählet. 2 und 6 und
	24383	7 und 4 und 9 machen 28 Zehner;

also wird 8 an die Stelle der Zehner gesetzt, und 2 zu den Hundertern gezählet. 2 und 5 sind 7 und 8 sind 15 und 3 sind 18 und 5 sind 23; also wird 3 an die Stelle der Hunderter gesetzt, und 2 zu den Tausendern gezählet, derer Summe 24 ausmacht, und ganz geschrieben wird.

BEWEIS.

Die Addition ist eine Sammlung mehrerer Zahlen in eine Summe (§. 18.); da nun auf diese Art die Einheiten, die Zehner, die Hunderter u. s. f. in eine Summe gesammelt sind, so ist demnach die Addition gemacht.

I. ANMERKUNG.

20. Die Übertragung der zur Linken fallenden Ziffer zur folgenden Stelle kann man auch auf diese Art darstellen, wenn die einzelnen Summen jeder Reihe an ihren gehörigen Stellen eine unter die andere geschrieben, und endlich in eine ganze Summe gesammelt werden. Das vorige Beyspiel würde dergestalt aussehen.

3564	
4878	
7345	
8596	
23 . .	Summe der Einheiten.
26 . .	Summe der Zehner.
21 . . .	Summe der Hunderter.
22 . . .	Summe der Tausender.
24383	

II. ANMERKUNG.

21. Die Probe, ob die Addition richtig gemacht sey, geschieht so: gleichwie man anfangs die Summen jeder

Reihe abwärts zusammen gezählet hat, so sammle man nun die nämlichen Summen aufwärts zusammen; kommt das zweyte Mahl eben dieselbe Hauptsumme heraus, wie das erste Mahl, so ist man ziemlich gewiſs, daſs die Addition ohne Fehler gemacht sey. Nur muſs man dabey sorgfältig beobachten, daſs die zu addirenden Zahlen vorher richtig geschrieben werden.

III. ANMERKUNG.

22. Einige machen die Probe anders: sie werfen aus allen zu addirenden Zahlen, nach ihrem natürlichen Werthe als Einheiten betrachtet, so oft 9 weg, als es sich thun läſst; eben das geschieht bey der Hauptsumme; ist nun der Rest auf beyden Seiten gleich, so soll das ganze Verfahren richtig seyn. Es wird richtig seyn, wenn nur die zu addirenden Zahlen vorher richtig geschrieben sind; wäre aber die eine oder andere Zahl aus Irrung verkehrt geschrieben, z. B. 23 statt 32, so würde zwar der Rest gleich bleiben, die Rechnung selbst aber doch fehlerhaft seyn.

IV. ANMERKUNG.

23. Sind längere Reihen von Zahlen zu addiren, so kann die Summe einer einzigen Reihe auch aus drey Ziffern bestehen; dann muſs aber die zur Rechten kommende Ziffer geschrieben, die zwey zur Linken hingegen, da sie den Werth der Zehner in sich haben, zur nächst folgenden Reihe gezählet werden; z. B. wenn die gesammelten Einheiten die Summe 135 geben, so wird 5 an die Stelle der Einheiten geschrieben, und 13 zur folgenden Reihe der Zehner gezählet. Um aber so wohl hier, als auch sonst der damit verbundenen Gefahr einer Verirrung zu entgehen, ist es rathsam, diese Reihen in mehrere kürzere durch kleine Linien abzutheilen, und auf solche Art die gesammelten einzelnen

Summen wieder in eine Hauptsumme zusammen zu zählen, wie folgendes Beyspiel darstellet:

29	
57	
118	
49	
.....	.....
79	253
88	
109	
58	
.....	.....
28	334
99	
19	
59	
.....	.....
	205
792	792

BEYSPIELE DER ADDITION.

I. In einem Kriegsheere befinden sich 15453 Granatiere, 25340 Musketiere, 12835 Reiter, 220 Artilleristen, 63 Ingenieure, 14500 Hilfstruppen, 3110 Freywillige. Wie groſs ist die ganze Summe?

II. Ein Fürst hat von dem Gute A jährliche Einkünfte 54048 Gulden; von B 76475; von C 29870; von D 70000; von E 10400; von F 14925. Wie hoch beläuft sich die ganze Summe?

II. ERKLÄRUNG.

24. Die *Subtraction* ist die Erfindung einer Zahl, welche den Unterschied zwischen zwey gegebenen Zahlen angibt; sie ist also die Verminderung einer gegebenen Gröſse, oder die Weg-

nehmung eines Theils vom Ganzen. Die gröſsere Zahl heiſst *die zu vermindernde* (Minuendus); die kleinere *die abzuziehende* (Subtrahendus); die neu gefundene Zahl *der Rest*, oder *Unterschied.*

II. AUFGABE.

25. Eine kleinere Zahl von einer gröſseren abziehen.

AUFLÖSUNG.

I. Man schreibet die kleinere Zahl dergestalt unter die gröſsere, daſs die Einheiten unter die Einheiten, die Zehner unter die Zehner u. s. w. zu stehen kommen.

II. Darunter ziehet man eine Linie, damit keine Verwirrung entstehe.

III. Nun machet man zur Rechten den Anfang, ziehet die Einheiten der unteren Zahl von den Einheiten der oberen Zahl ab, und schreibet den Rest unter die Linie, an die Stelle der Einheiten. Eben das geschieht bey den Zehnern, Hundertern u. s. w. (Siehe das I. Beyspiel.) Ist die Ziffer der abzuziehenden oder unteren Zahl der oberen gleich, so ist der Rest gleich 0, oder nichts; es ist also hier eine Nulle unter die Linie zu setzen. Sollte die untere Ziffer gröſser seyn, als die obere, so wird von der nächst stehenden oberen Ziffer eine Einheit entlehnet, und mit der letzteren oberen Ziffer dergestalt zusammen gezählt, daſs sie mit dieser zwey besonders geschriebene Ziffern ausmache, das ist, ihren Werth als Zehner behalte; und nun wird von der auf solche Art vermehrten oberen Ziffer die untere abgezogen. Diejenige Ziffer, von welcher man eine Einheit entlehnet, wird sogleich mit einem Punkte bezeichnet, damit man bey dem Abzuge der folgenden Ziffer nicht vergeſse, daſs dieselbe um eine Einheit vermindert worden ist. (Siehe II. Beyspiel.) Ist endlich oben so wohl, als unten eine Nulle, so wird auch in dem Reste eine Nulle geschrieben; stehet oben eine Zahl, und unten eine Nulle, so wird die oben stehende Zahl ganz unter die Linie gesetzt; steht aber oben eine Nulle, und unten eine Zahl, so entlehnet man zur Nulle von der nächst folgenden Ziffer eine Einheit, welche nun, an die Stelle der Nulle gezogen, schon zehn gilt; wäre aber auch das nächst folgende keine Zahl, sondern wieder eine Nulle, so entlehnet man von der weiter folgenden, das ist, von der dritten Zifferstelle eine Einheit; da diese nach ihrem Werthe 10 Zehner enthält, so werden davon 9 Zehner auf die zweyte Zifferstelle, und 1 Zehner auf die erste Stelle übertragen. Dieses ist von allen vorhergehenden Nullen zu verstehen, bis man zu einer Zahl kommt. Überhaupt kann man sich merken, daſs die von der äuſsersten Zahl genommene Einheit durch eine auch noch so lange Reihe von Nullen so vertheilet wird, daſs die letzte dieser unmittelbar auf einander folgenden Nullen die Zahl zehen, die vorhergehenden aber jede die Zahl 9 erhält. (Siehe das III. Beyspiel.

I. Beyspiel.	6795	Sage 4 von 5 bleibet 1 Einheit.
	1324	2 von 9 bleiben 7 Zehner.
	5471	3 von 7 bleiben 4 Hunderter.
		1 von 6 bleiben 5 Tausender.

II. Beyspiel.	35420	Sage 0 von 0 bleibet 0
	25760	6 von 12 bleiben 6
	9660	7 von 13 bleiben 6
		5 von 14 bleiben 9
		2 von 2 bleibet nichts.

III. Beyspiel.	90000	Sage 0	von	0	bleibet	0
	2340	4	von	10	bleiben	6
	87660	3	von	9	bleiben	6
		2	von	9	bleiben	7
		nichts	von	8	bleiben	8

BEWEIS.

Bey der Suburaction ist die dritte Zahl zu finden, welche den Unterschied zwischen den zwey gegebenen Zahlen zeiget; da nun, nach den obigen Regeln, der Unterschied zwischen den Einheiten, Zehnern, Hundertern u. s. w. genommen, und unter die Linie geschrieben ist, so ist die Subtraction auf solche Art geschehen.

I. ANMERKUNG.

26. Die Probe der Subtraction wird durch die Addition gemacht: nähmlich, wenn man den Unterschied zur kleineren Zahl addiret, so geben diese zwey zusammen die grösere Zahl. Denn da nur der Unterschied die Gröſse darstellet, wie viel die kleinere Zahl von der gröſseren abstehet; so wird, wenn man diesen Unterschied zur kleineren addirt, diese Vereinigung von der gröſseren Zahl nicht mehr unterschieden, sondern derselben vollkommen gleich seyn. Wenn man in dem I. Beyspiele den Unterschied und die kleinere Zahl addirt, so erscheint die gröſsere Zahl.

1324	kleinere Zahl.
5471	Unterschied.
6795	gröſsere Zahl.

II. ANMERKUNG.

27. Man kann auch die Probe der Subtraction durch die Subtraction selbst machen, indem der Unterschied, von der gröſseren Zahl abgezogen, der kleineren gleich seyn muſs.

Denn diese ist wieder ein Unterschied zwischen der gröſseren Zahl und dem Reste.

6795	gröſsere Zahl.
5471	Unterschied.
1324	kleinere Zahl.

BEYSPIELE DER SUBTRACTION.

I. Ein Kauſmann bezahlt für empfangene Waaren 34060 Gulden, verkauft sie wieder um 51985 Gulden. Wie viel hat er dabey Gewinn?

II. Das gegenwärtige Jahr ist 1795. Peter ist im Jahre 1741 geboren. Wie viel Jahre ist er alt?

III. Das feindliche Heer war vor der Schlacht 51094 Mann; davon sind 3004 gefallen; wie viel sind übrig geblieben?

III. ERKLÄRUNG.

28. Die *Multiplication* ist die Erfindung einer Zahl, welche eine der gegebenen Zahlen so oft in sich enthält, als die andere Einheiten zählet. Sie ist also eine Addition der nähmlichen Zahl, so oft wiederhohlet, als Einheiten in der andern Zahl enthalten sind. Beyde Zahlen, welche multipliciret werden, heiſsen *Factoren;* einer von diesen, meistens der gröſere, wird *Multiplicandus,* der andere, oder kleinere aber *Multiplicator* genannt; die durch die Multiplication entstandene Zahl heiſst das *Product* oder *Factum.* So sind 6 und 7 die Factoren, 42 ist das Product.

FOLGERUNG.

29. Jeder von diesen Factoren kann also der Multiplicandus, und jeder der Multiplicator seyn; indem es einerley ist, ob man 3 vier Mahl, oder 4 drey Mahl addire. Denn in dem Producte ist immer einer der Factoren

so oft enthalten, als der andere Factor Einheiten zählet. Ist der eine Factor eine Einheit, so wird der andere nur einmahl gesetzt, das ist, er wird so geschrieben, wie er ist; daher sagt man: *Eins multipliciret nichts.*

I. ANMERKUNG.

30. Die Multiplication der ersten neun Ziffern, oder die Producte derselben haben keine Regel; sondern werden durch die Übung oder durch die Fingerrechnung erlernet. Da hier vorzüglich das Gedächtnifs beschäftiget wird, so kommt man diesem durch die so genannte *Regula pigri*, oder durch die pythagorische Tafel zu Hilfe. Mittels der ersten findet man an den Fingern der beyden Hände die Producte der Factoren, von 6 anzufangen (denn die Zahlen unter 6 sind leicht zu multipliciren). Die rechte Hand bedeutet den einen, die linke den andern Factor; den Factor selbst drücken die aufrecht stehenden Finger aus; und zwar auf diese Art: wenn 6 der Factor ist, wird ein Finger aufgerichtet; ist 7 der Factor, werden zwey, ist 8 der Factor, drey Finger u. s. w. aufgerichtet. Die stehenden Finger werden als Zehner, die liegenden als Einheiten betrachtet, doch so, dafs die stehenden Finger blofs addiret; die liegenden der einen Hand aber durch die liegenden der andern Hand multipliciret werden. Z. B. will man 6 mit 6 multipliciren, so wird in jeder Hand ein Finger aufgerichtet, vier Finger aber bleiben in jeder Hand liegen; die zwey stehenden addiret, machen 20; vier mit vier multipliciret, gibt 16; also geben die stehenden und liegenden Finger zusammen 36, welches das Product von sechs Mahl 6 ist. Will man 7 mit 8 multipliciren, so werden in einer Hand zwey, in der andern drey Finger aufgerichtet; zwey aber bleiben in einer, und drey in der andern liegen; die fünf stehenden Finger addiret, machen 50; die zwey und drey liegenden aber multipliciret, geben 6; also ist das ganze Product 56.

II. ANMERKUNG.

31. Die pythagorische Tafel enthält die Producte aller einfachen Zahlen. Sie wird auf folgende Art verfaſst: oben und unten auf der Tafel werden neun Abtheilungen gemacht; zur Rechten und zur Linken eben so viele; beyde Abtheilungen werden dann mit geraden Linien verbunden. In der ersten obersten Reihe schreibt man die neun einfachen Zahlen nach ihrer Ordnung; in der zweyten Reihe den Zweyer und seine Producte durch alle einfachen Zahlen, da man nähmlich zur vorhergehenden Zahl immer zwey stufenweise addiret; in der dritten Reihe den Dreyer und seine Producte, da man zur vorhergehenden Zahl immer drey addiret, und so fort bis zum Neuner. Diese Tafel wird also alle Producte der einfachen Zahlen enthalten, wie die III. Figur zeiget. Der Gebrauch der Tafel ist folgender: man sucht den einen Factor in der obersten, den andern in der linken Reihe; dann fährt man von der obersten abwärts, und von der linken zur rechten Hand, so wird das Feldchen, wo sich beyde Factoren in einen Punkt vereinigen, ihr Product enthalten. Z. B. Man soll 6 mit 7 multipliciren; man fährt also von 6 in der obersten Reihe in gerader Linie herab, bis man zu dem Feldchen kommt, in deſsen Reihe zur linken Hand 7 stehet, so wird man auf diesem Feldchen das Product 42 finden.

III. AUFGABE.

32. Gegebene Zahlen multipliciren.

AUFLÖSUNG.

I. Man schreibt den kleineren Factor unter den gröſseren, doch so, daſs Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner u. s. f. zu stehen kommen.

II. Unter den Factoren wird eine Linie gezogen.

III. Nun werden die Einheiten des Multiplicators durch alle Ziffern des Multiplicandus von der rechten zur linken Hand fortgeführet, und die einzelnen Producte, wenn sie durch eine Ziffer ausgedrückt werden können, von der rechten zur linken Hand so geschrieben, daſs die Producte der Einheiten, Zehner u. s. f. unter die Ziffern der Einheiten, Zehner u. s. f. des Multiplicandus zu stehen kommen; wie in dem I. Beyspiele zu sehen ist. Bestünde das Product aus zwey Ziffern, so wird nur jene Ziffer, die zur Rechten fällt, geschrieben, die andere aber indeſsen im Gedächtniſse behalten, und hernach zum Producte der folgenden Ziffer addiret; wie das II. Beyspiel zeiget. Ist nun die Multiplication mit den Einheiten vollendet, so verfährt man eben so mit den Zehnern; diese Ziffer nähmlich wird wieder durch alle Ziffern des Multplicandus geführt, und das Product sogleich an die zweyte Zifferstelle des Multiplicators, d. i. an die Stelle der Zehner gesetzt, indem alle diese Producte an sich selbst Zehner sind. Überhaupt ist zu merken: *daſs das Product auf derjenigen Stelle anfangen müſse, wo die multiplicirende Ziffer stehet.* Nach geendigter Multiplication der Zehner, geschieht das nähmliche mit den Hundertern, d. i. mit der dritten Ziffer des Multiplicators; dann mit der vierten, und so fort, so viel deren vorhanden sind; wie im III. Beyspiele.

IV. Diese einzelnen Producte werden in eine Hauptsumme addiret, und so erhält man das gesuchte Product.

I. Beyspiel.	1342	Sage 2 Mahl 2 gibt 4 Einheiten.
	2	4 Mahl 2 gibt 8 Zehner.
		3 Mahl 2 gibt 6 Hunderter.
	2684	1 Mahl 2 bleiben 2 Tausender.

II. Beyspiel.

896	Sage 6 Mahl 3 gibt 18 bleibet 1.
3	9 Mahl 3 gibt 27 und eines, das übrig blieb, 28.
2688	8 Mahl 3 gibt 24, und zwey dazu, sind 26.

III. Beysp.

53684	Sage 4 Mahl 5 gibt 20.
325	8 Mahl 5 gibt 40 und 2 sind 42.
268420	6 Mahl 5 gibt 30 und 4 sind 34.
107368	3 Mahl 5 gibt 15 und 3 sind 18.
161052	5 Mahl 5 gibt 25 und 1 sind 26.
17447300	Dann geschieht die Multiplication mit 2, doch so, daſs das

erste Product an die Stelle der Zehner geschrieben wird, nähmlich: 4 Mahl 2 gibt 8
8 Mahl 2 gibt 16, bleibet 1
und so fort.

BEWEIS.

Die obere Zahl, oder der Multiplicandus ist so oft gesetzt worden, als die untere Zahl oder der Multiplicator Einheiten zählet; denn im II. Beyspiele sind die Einheiten drey Mahl, die Zehner drey Mahl, die Hunderter drey Mahl gesetzt; hierin aber bestehet nach der obigen Erklärung die Multiplication; also sind die gegebenen Zahlen multipliciret.

I. ANMERKUNG.

33. Die Übertragung derjenigen Ziffer, die zur Linken fällt, zum folgenden Producte, kann eben so bewiesen werden, wie bey der Addition gesagt worden ist; wenn man nähmlich jedes Product an seine gehörige Stelle besonders schreibet; wie unten das vierte Beyspiel darstellet.

II. ANMERKUNG.

34. Die Probe der Multiplication geschieht durch die Division, von welcher in der folgenden Aufgabe gehandelt wird; denn was die Multiplication, und wie sie etwas zusammensetzt, diefs wird durch die Division auf die nähmliche Art in seine Theile wieder aufgelöset. Wenn man also das Product durch einen der Factoren dividirt, so mufs der andere Factor erscheinen.

III. ANMERKUNG.

35. Wenn ein Factor, oder auch beyde mit Nullen sich endigen, so werden indefsen die Nullen abgeschnitten, und die Multiplication wird allein mit den andern Ziffern, nach den gegebenen Regeln, vorgenommen; ist dieses geschehen, so werden dem Hauptproducte, oder der Summe aller Producte so viel Nullen angehängt, als in einem oder beyden Factoren abgeschnitten wurden: wie im V. Beyspiele.

IV. ANMERKUNG.

36. Wenn in der Mitte des Multiplicators Nullen vorkommen, so können auch diese weggelafsen werden; nur ist hier das nähmliche zu bemerken, was oben von der Stellung der einzelnen Producte gesagt worden ist: nähmlich, das Product der unmittelbar nach den Nullen folgenden Ziffer mufs unten an derjenigen Stelle anfangen, wo die multiplicirende Ziffer stehet; wie im VI. Beyspiele.

IV. Beyspiel.

```
 896
   3
 ---
  18
 27
24
----
2688
```

V. Beyspiel.

```
 24000
   300
-------
24|00000
 3|
-------
72|00000
```

VI. Beyspiel.

```
   450864
     4002
 --------
   901728
 1803456
 ----------
 1804357728
```

V. ANMERKUNG.

37. Wenn gröſsere oder längere Zahlen mit gröſseren zu multipliciren sind, so wird es sehr dienlich seyn, wenn man vorläufig die ganze Zahl des Multiplicandus durch die neun einfachen Ziffern, vervielfältiget, daſs der Multiplicandus erst doppelt, dann dreyfach, vierfach, fünffach u. s. f. genommen, und hinter einander geschrieben wird; hierauf wird man von diesen Producten leicht diejenigen, welche die Ziffer des Multiplicators fordert, ausheben, und an die gehörige Stelle, und nach ihrer Ordnung schreiben können.

Z. B. Man soll 97868 mit 75896 multipliciren.

Das Zweyfache des Multiplicandus entstehet, entweder wenn der Multiplicandus zu sich selbst addiret, oder wenn er mit 2 multipliciret wird. Das Dreyfache, entweder wenn man zu dem Zweyfachen noch ein Einfaches addiret, oder wenn man das Einfache mit 3 multipliciret. Das Vierfache, wenn man zu dem Dreyfachen ein Einfaches addiret, oder das Zweyfache mit 2 multipliciret. Das Fünffache, wenn man zu dem Vierfachen wieder ein Einfaches, oder zu dem Zweyfachen das Dreyfache addiret, oder wenn man das Einfache mit 5 multipliciret u. s. f. Der vervielfältigte Multiplicandus wird also in folgender Ordnung stehen.

Das Einfache	97868	Der Multiplicandus		97868
Das Zweyfache	195736	Der Multiplicator		75896
Das Dreyfache	293604	Das Sechsfache	=	587208
Das Vierfache	391472	Das Neunfache	=	880812
Das Fünffache	489340	Das Achtfache	=	782944
Das Sechsfache	587208	Das Fünffache	=	489340
Das Siebenfache	685076	Das Siebenfache	=	685076
Das Achtfache	782944			7427789728
Das Neunfache	880812			

Diese vielfachen Zahlen aber erhält man am leichtesten mittels der Neperischen Tabellen, welche aus der oben erklärten Pythagorischen Tafel gemacht werden, indem man, mit Ausnahme der obersten Reihe, welche unzertheilt bleibet, in allen übrigen die Ziffern durch Querlinien, und folglich jedes Feldchen in zwey Theile absondert (Siehe die IV. Figur). Auf jedem Feldchen stehen zur Rechten die Einheiten, zur Linken die Zehner. Man muſs aber nebstbey noch zwey andere abgesonderte Tabellen haben; nähmlich eine für die Nullen, auf welcher die Feldchen gleichfalls durch Querlinien getheilet sind, und die Nullen zur Rechten stehen; die andere hat ganze, d. i. ungetheilte Feldchen, und enthält die neun einfachen Zahlen nach ihrer Ordnung. (Siehe die V. Figur). Man macht diese Tabellen aus Holz oder steifem Kartenpapier, oder einer andern dichten Materie; es müſsen aber ihrer mehrere bey der Hand seyn, indem die nähmliche Ziffer öfter vorkommen kann.

38. Der Gebrauch ist folgender: die Tabellen werden so geordnet, daſs auf der obersten Reihe der Multiplicandus stehe; man nimmt nähmlich diejenigen, welche mit den Ziffern des Multiplicandus anfangen, und setzet sie in der Ordnung, in welcher die Ziffern des Multiplicandus stehen, zusammen. Voraus zur Linken stellet man die Tabelle der neun einfachen Zahlen, welche die Stelle des Multiplicators vertritt; wie in der VI. Figur das vorhergehende Beyspiel erkläret wird. Die Tabellen 97868 stellen den Multiplicandus dar, die Ziffern des Multiplicators aber werden

in der ersten Tabelle gesucht. Dann hebt man die vielfachen Zahlen auf folgende Art aus. Man sucht in der Columne der einfachen Zahlen die Ziffer des Multiplicators, also in unserem Falle 6; die ganze Reihe von 6 gegen die rechte Hand enthält die vielfachen Zahlen dieser Ziffer. Die erste zur Rechten stehende Ziffer zeiget 8 Einheiten, welche in dem Producte an die Stelle der Einheiten gesetzt werden; die zweyte zur Linken stehende Ziffer 4 wird zu jener addirt, welche zur Rechten in der folgenden Columne stehet, nähmlich 6; die Summe ist 10, wovon die Nulle an die Stelle der Zehner in dem Producte geschrieben, und 1 zur folgenden Ziffer 3 gezählet wird, welche nun schon 4 übrig läſst; diese mit der Ziffer 8 der folgenden Columne macht 12; also wird 2 an die Stelle der Hunderter geschrieben und 1 zur folgenden Ziffer 4 gezählet; welche mit der anstoſsenden Ziffer 3 schon 7 für die Tausender gibt; nun folget 4, und 4 sind 8 und endlich die einzige Ziffer 5; daſs also das ganze Vielfache oder Sechsfache 587208 ausmacht. Eben so verfährt man mit der Ziffer 9 in der letzten Reihe, wo man immer die links stehende Ziffer der vorhergehenden Columne, zur rechts stehenden Ziffer der folgenden Columne addiret; die in gehöriger Ordnung geschriebenen Summen enthalten alle einzelnen Producte, welche in eine Hauptsumme gesammelt, das ganze Product, des Multiplicators und Multiplicandus geben; wie das vorige Beyspiel zeiget. Die Richtigkeit des Verfahrens erhellet daraus: jedes Feldchen enthält das Product der obersten Ziffer, und der zur Linken stehende Seitenziffer, welches Product nach den oben gegebenen Regeln, in dem Hauptproducte dergestalt geschrieben wird, daſs man nur die rechts stehende Ziffer setzet, die links stehende aber, oder den Zehner zum folgenden Producte zählet; da nun dieses mittels der Neperischen Tabellen, welche die Producte in gehöriger Ordnung enthalten, zu Stande kömmt, so ist nach diesen Regeln alles richtig gemacht.

BEYSPIELE DER MULTIPLICATION.

I. Eine Insel enthält 36 Districte; jeder District bestehet aus 40 Pfarren, jede Pfarre aus 98 Häusern, jedes Haus aus 9 Personen. Wie groſs ist die Anzahl der Personen auf der ganzen Insel? 1270080.

II. Ein Feld ist 102004 Schuhe lang; 102003 Schuhe breit. Wie viel hat es also Quadratschuhe, wenn nämlich die Länge mit der Breite multipliciret wird? 10404714012.

III. 1795 Jahre, wie viel enthalten sie Tage? (das Jahr zu 365 Tagen) wie viel Stunden? (den Tag zu 24 Stunden) wie viel Minuten? (die Stunde zu 60 Minuten gerechnet).

IV. ERKLÄRUNG.

39. Die *Division* ist eine so oft wiederhohlte Subtraction einer Zahl von der andern, als die dritte zu suchende Zahl Einheiten zählet; oder dividiren heiſst, diejenige Zahl finden, in welcher so oft 1 enthalten ist, als die kleinere Zahl in der gröſseren. Die gröſsere Zahl heiſst der *Dividendus*, die kleinere der *Divisor*, die dritte der *Quotient*. Die erste zeiget an, daſs das Ganze in Theile aufzulösen; die zweyte, in wie viel Theile das Ganze abzutheilen sey; die dritte, wie viel Theile von dem Ganzen auf jeden fallen; z. B. wenn 20 Gulden unter 10 Armeververtheilet werden, so bekommt jeder derselben 2 Gulden.

FOLGERUNG.

40. Wenn der Divisor 1 ist, so muſs der Quotient dem Dividendus gleich seyn; denn da der Quotient so oft 1 enthalten muſs, als der Divisor in dem Dividendus enthalten ist; der Divisor aber in dem gegenwärtigen Falle so oft

enthalten ist, als der Dividendus Einheiten hat, so kann auch kein anderer Quotient seyn, als die gegebene Zahl ist; daher sagt man: *Eins dividiret nichts.* So ist in 6 die Einheit sechs Mahl enthalten; folglich ist auch der Quotient 6.

I. ANMERKUNG.

41. Wie oft die kleinere Zahl in der größeren enthalten sey, dieſs läſst sich durch keine sichere Regel bestimmen, sondern wird wieder durch bloſse Übung oder durch die Fingerrechnung erlernet. Doch kann auch hierzu die Pythagorische und Neperische Tabelle dienen. Man sucht nähmlich den Divisor auf der linken Seite, dann fährt man in gerader Linie zur Rechten, und suchet in den Feldchen die gegebene gröſsere Zahl, oder diejenige, welche der gegebenen Zahl am nächsten kommt; von diesem Feldchen nun fährt man in gerader Linie hinauf, und so findet sich in der obersten Reihe der Quotient. Will man z. B. wiſsen, wie oft 6 in 42 enthalten sey, so fährt man von 6 zur rechten Hand auf 42, von da hinauf in die oberste Reihe, wo der gesuchte Quotient 7 sich zeiget. Wäre das gesuchte Product nicht vorhanden, so nimmt man das kleinere Product, welches dem gesuchten am nächsten kommt. Die Ursache ergibt sich von selbst; denn da die Division auflöset, was die Multiplication zusammen setzt, so wird, wenn das Product und ein Factor (oder der Dividendus und der Divisor) gegeben ist, der andere Factor oder der Quotient erhalten; multipliciret man die Factoren mit einander, so entstehet das Product, welches durch die Division wieder in die Factoren aufgelöset wird.

I. FOLGERUNG.

42. Eine Gröſse also, mit der nähmlichen Zahl multipliciret uud dividiret, leidet keine Veränderung, weil sie in eben die Theile aufgelöset wird, in welche sie zusammen gesetzt ist. Z. B. wenn 42 mit 6 multipliciret, und das Product wieder mit 6 dividiret wird, bleibt 42.

II. FOLGERUNG.

43. Aus eben diesem Grunde folget auch, dafs der Quotient aus einer einzelnen Division nicht gröfser seyn kann, als 9; denn das höchste Product zweyer Zahlen, nähmlich 81, hat keine höheren einfachen Factoren als 9 und 9.

II. ANMERKUNG.

44. Wenn der Fall eintrifft, dafs der Dividendus eine kleinere Zahl ist, als der Divisor, so kann die Division nach den oben gegebenen Regeln nicht geradehin vor sich gehen, sondern wird nur dadurch angezeiget, dafs man unter dem Dividendus eine Linie ziehet, und unter dieser den Divisor schreibet. Z. B. Man soll 5 in 6 Theile theilen, so schreibet man $\frac{5}{6}$, welches anzeiget, dafs 5 mit 6 dividirt, oder in 6 Theile getheilet werden soll.

III. ANMERKUNG.

45. Die einzige Rechnungsart geschieht von der Linken zur Rechten, alle übrigen aber fangen von der Rechten zur Linken an, weil man bey der Division oder Zertheilung der Dinge zuerst die gröfseren Theile vornehmen mufs, um hernach dasjenige, was davon übrig bleibt, wieder in kleinere Theile gehörig eintheilen zu können.

IV. AUFGABE.

46. Eine gegebene Zahl dividiren, wenn der Divisor aus einer einzigen Ziffer bestehet.

AUFLÖSUNG.

I. Am Ende des Dividendus wird eine Klammer gemacht, und hinter diese werden die Quotienten, um beyderley Zahlen genau unterscheiden zu können, gesetzt.

II. Der Divisor wird unter die erste zur Linken stehende Ziffer des Dividendus, oder wenn diese kleiner ist, als der Divisor, unter die zweyte geschrieben.

III. Nun wird untersucht, wie oft der Divisor in der ersten Ziffer, oder wenn er gröſser ist als diese, in den zwey ersten Ziffern des Dividendus enthalten sey; und dieser gefundene Quotient wird sogleich hinter die Klammer gesetzt.

IV. Mit diesem Quotienten multipliciret man den Divisor, und setzet das Product dergestalt unter dem Divisor, daſs es gerade unter der Ziffer, oder den Ziffern, welche dividiret worden sind, zu stehen kommt. Unter dem Producte ziehet man eine Linie.

V. Dieses Product wird von den unmittelbar oben stehenden Ziffern des Dividendus subtrahiret, und der Rest unter die Linie geschrieben.

VI. Zu diesem Reste setzet man die nächstfolgende Ziffer des Dividendus herab, bemerket sie aber zugleich mit einem Zeichen, um anzudeuten, daſs diese Ziffer schon übertragen worden ist; und dieses Verfahren wiederhohlet man, von der zweyten Ziffer anzufangen.

I. Beyspiel. Man soll 7638 mit 3 dividiren. Man setzt also 3 unter 7, und machet nach dem Dividendus das Zeichen (

```
7638 (2546
3
6
―
 16
  3
 15
 ―
  13
   3
  12
  ―
   18
    3
   18
   ―
    0
```

Sage: 3 in 7 ist zwey Mahl enthalten; der Quotient 2 wird hinter die Klammer gesetzt, mit diesem der Divisor 3 multiplicirt, das Product 6 unter den Divisor dergestalt geschrieben, daſs es in gerader Linie unter dem Dividendus 7 stehet, und nun wird es von dem Dividendus subtrahiret; zu dem Reste 1 setzet man die folgende Ziffer 6 herab und bezeichnet sie oben mit einem Punkte. Unter 6 schreibet man den Divisor 3, und untersucht, wie oft 3 in 16 enthalten sey; der gefundene Quotient ist 5, welcher an dem Platze des Quotienten hinter 2 geschrieben, mit dem Divisor 3 multipliciret, das Product 15 von 16 subtrahiret, und zu dem Reste 1 die folgende Ziffer 3 herab gesetzt wird. Darunter schreibt man wieder den Divisor 3, und fragt, wie oft 3 in 13 enthalten sey; der Quotient 4 wird hinter 5 den Quotienten beygesetzt, und mit dem Divisor 3 multipliciret; das Product ist 12, welches, von 13 abgezogen, 1 übrig läſst; zu diesem wird die letzte Ziffer 8 herab gesetzt, und gefragt, wie oft 3 in 18 enthalten sey; der Quotient 6 zu den übrigen Quotienten geschrieben, und mit 3 multipliciret, gibt das Product 18, welches von 18 abgezogen, 0 übrig läſst. Und so ist der ganze Quotient 2546.

BEWEIS.

Dividiren heiſst eine Zahl suchen, welche so oft 1 in sich enthält, als die kleinere Zahl in der gröſseren, oder in den Tausendern, Hundertern u. s. f. enthalten ist; da nun diese Zahl nach den gegebenen Regeln gesucht, und gefunden worden ist, so ist die Division richtig gemacht. Nämlich 7 Tausender, in 3 Theile getheilet, geben den Quotienten 2 Tausender, und es bleibet noch ein Tausender übrig; zu diesem kommen 6 Hunderter, also sind es 16 Hunderter, welche, in 3 Theile getheilet, jedem 5 Hunderter geben, und es bleibt wieder 1 Hunderter übrig; setzt man zu diesem die drey Zehner, so hat man 13 Zehner, welche mit 3 dividiret, 4 Zehner in dem Quotienten geben; die zu dem übrig bleibenden Zehner hinzu gesetzten 8 Einheiten machen 18 Einheiten; werden diese wieder unter 3 getheilet, so kommen auf jeden 6 Einheiten.

FOLGERUNG.

47. Hieraus erhellet, daſs man so viel Ziffern in dem Quotienten erhält, als einzelne Divisionen gemacht worden sind, das ist: es entstehen so viel Ziffern in dem Quotienten, als in dem Dividendus, nachdem der Divisor gehörig darunter gesetzt worden ist, zur Rechten noch allein stehen bleiben, und noch eine darüber aus der ersten Division. Im II. Beyspiele bleiben zwey Ziffer, nähmlich 48, frey; also sind drey Ziffern im Quotienten. Im III. Beyspiele bleiben vier Ziffern frey; also sind fünf Ziffern im Quotienten. Im IV. Beyspiele drey Ziffern frey; also vier Ziffern im Quotienten. Im V. Beysp. zwey frey; also drey im Quotienten. Im VI. Beysp. vier frey; also fünf im Quotienten.

V. AUFGABE.

48. Eine gegebene Zahl dividiren, wenn der Divisor aus mehreren Ziffern bestehet.

AUFLÖSUNG.

I. Man machet eine Klammer, wie vorher.

II. Man schreibet die erste Ziffer des Divisors unter die erste zur Linken stehende Ziffer des Dividendus (ausgenommen, sie wäre kleiner) die übrigen Ziffern aber unter die übrigen.

III. Nun wird gefragt, wie oft die erste Ziffer des Divisors in der ersten Ziffer (oder in den zwey ersten Ziffern) des Dividendus enthalten sey; und der gefundene Quotient wird hinter die Klammer geschrieben.

IV. Der gefundene Quotient wird mit dem ganzen Divisor multipliciret und das Product unter die gehörigen Ziffern des Divisors geschrieben.

V. Dann wird eine Linie gezogen, und das Product von denjenigen Ziffern des Dividendus, nnter welche dasselbe gesetzt worden ist, subtrahiret. (Wäre aber das Product gröſser, als daſs es subtrahiret werden könnte, so nimmt man den Quotienten um eine Einheit kleiner).

VI. Zu dem Reste setzt man die folgende Ziffer des Dividendus, von welcher noch nichts subtrahiret worden ist, und schreibet den ganzen Divisor daruntnr; das nähmliche wird wiederhohlet, von der dritten Ziffer anzufangen.

II. Beyspiel. Man soll 36448 mit 68 dividiren.

36448 (536 68 340 ――― 244 68 204 ――― 408 68 408 ――― 0	Sage: 6 in 36 wie oft? es ist zwar 6 Mahl enthalten, da aber das Product, wenn man diesen Quotienten mit dem Divisor multipliciret, 408 ist, und hier gröſser ausfällt, als daſs es subtrahiret werden könnte, so nimmt man den Quotienten 5, welcher, mit dem Divisor 68 multipliciret, das Product 340 gibt; wird dieses subtrahiret, so bleibet der Rest 24. Setzt man zu diesem die

folgende Ziffer 4 herab, so bekommt man den Dividendus 244, welcher, mit 68 dividiret, den Quotienten 3 gibt. Multipliciret man diesen Quotienten mit dem Divisor, so erhält man die Zahl 204; wird nun diese subtrahiret, so bleibet ein Rest von 40. Setzt man die letzte obige Ziffer 8 herab, so entstehet die Zahl 408; diese, mit 68 dividiret gibt den Quotienten 6, welcher, mit dem Divisor multipliciret, das Product 408 gibt; subtrahiret man dieses von dem Dividendus, so ist der Rest = 0, und der ganze Quotient 536. Auf diese Art können alle Beyspiele, wo der Divisor aus drey, vier oder mehreren Ziffern bestehet, gemacht werden.

I. ANMERKUNG.

49. Wenn, nach vollendeter Division, ein Rest von der letzten Subtraction bleibet, so wird er zur rechten Seite des Quotienten gesetzt; unter dem Reste wird eine Linie gezogen, und unter dieser der Divisor geschrieben (§. 44.). Z. B. 22 mit 5 dividiret, gibt den Quotienten 4, und den Rest 2; welcher letztere mit dem darunter geschriebenen Divisor nach dem Quotienten gesetzt wird, nähmlich $4\frac{2}{5}$

II. ANMERKUNG.

50. Wenn bey der Division der Fall sich ereignet, daſs die herab gesetzte Ziffer entweder allein ohne vorhergehenden Rest, oder auch mit vorhergehendem Reste zusammen, eine kleinere Zahl ist, als daſs sie dividirt werden könnte, so wird statt alles andern bloſs eine Nulle in dem Quotienten geschrieben; zu dem vorigen Reste nimmt man wieder die nächst folgende Ziffer des Dividendus herab, und setzt die Division weiter fort; wie in dem III. Beyspiele.

III. ANMERKUNG.

51. Wenn der Divisor aus mehreren Ziffern bestehet, so geschieht es öfter, daſs, wenn man fragt, wie oft die erste Ziffer des Divisors in der ersten des Dividendus enthalten sey, der Quotient zu groſs genommen wird, indem man

auch auf die übrigen Ziffern des Divisors Rücksicht nehmen muſs; daher es sich dann ereignet, daſs die erste Ziffer des Divisors in der ersten des Dividendus öfter enthalten ist, als der ganze Divisor in derjenigen Zahl, unter welche er geschrieben ist; und daſs dann ein gröſserer Quotient gesetzt wird, als daſs man das Product, welches durch Multiplicirung dieses Quotienten mit dem Divisor entstehet, subtrahiren könnte; in diesem Falle muſs man die Division von neuem anfangen, und einen kleineren Quotienten nehmen. Diese Schwierigkeit kann man dadurch heben, wenn man vorher die oben (§. 37.) beschriebenen vielfachen Zahlen des Divisors macht, welche deutlich vor Augen stellen, was für ein Product des mit dem Divisor multiplicirten Quotienten von dem Dividendus subtrahiret werden könne, und welcher der eigentliche wahre Quotient sey.

IV. ANMERKUNG.

52. Wenn der Divisor mit Nullen sich endiget, so können diese unter die letzten zur Rechten stehenden Ziffern des Dividendus geschrieben werden; indem man nähmlich die Nullen von dem Divisor, und eben so viele Ziffern von dem Dividendus abschneidet, mit den übrigen aber die Division vornimmt. Ist man dann mit der Division fertig, so werden die vorher abgeschnittenen Ziffern des Dividendus zu dem Reste, wenn einer geblieben ist, gesetzt, und am Ende des Quotienten ober der Linie geschrieben, wie vorher gesagt worden ist; unter der Linie aber wird der Divisor geschrieben, wie das V. Beyspiel zeiget, wo 563874 mit 2300 zu dividiren ist. Ist aber kein Rest geblieben, so werden die abgeschnittenen Ziffern sammt dem darunter geschriebenen Divisor nach dem Quotienten gesetzt.

V. ANMERKUNG.

53. Wenn sich beyde, so wohl der Dividendus als der Divisor, mit Nullen endigen, so wird auf beyden Seiten eine gleiche Anzahl der Nullen abgeschnitten, und mit den

übrigen Ziffern die Division vorgenommen. Z. B. man soll 849000 mit 3000 dividiren, so dividiret man bloſs 849 mit 3; und der wahre Quotient ist 283; denn es wird voraus gesetzt, daſs so wohl der Dividendus als der Divisor mit der nähmlichen Zahl (das ist, mit 1 und gleich vielen Nullen auf beyden Seiten oder mit 1000) multipliciret worden ist; daher man dann die beyderseitigen Nullen weglaſsen kann (§. 45.).

VI. ANMERKUNG.

34. Ist der Divisor 1 mit angehängten Nullen z. B. 10, 100, 1000 u. s. f. so werden in dem Dividendus zur Rechten so viel Ziffern abgeschnitten, als der Divisor Nullen hat; die übrig bleibenden Ziffern sind dann der Quotient, weil Eins nichts dividiret; die abgeschnittenen Ziffern aber werden sammt dem darunter geschriebenen Divisor nach dem Quotienten gesetzt, z. B. 684375 mit 1000 dividiret, gibt den Quotienten $684\frac{375}{1000}$.

VII. ANMERKUNG.

35. Die Probe der Division geschieht durch die Multiplication. Wenn man nähmlich den gefundenen Quotienten mit dem Divisor multipliciret, so gibt das Product den Dividendus; denn da die Division auflöset, was die Multiplication zusammen setzt, so muſs, wenn der Dividendus durch den Divisor in den Quotienten aufgelöset, der Quotient aber durch den Divisor mittels der Multiplication in das Product zusammen gesetzt wird, dieses Product dem Dividendus gleich seyn. Man vergleiche das VI. Beyspiel mit dem Beyspiele in der V. Anmerkung der Multiplication. §. 37.

III.	Beyspiel.	241672 (30209		
		8		
IV.	Beyspiel.	246656 (3008		
		82		
V.	Beyspiel.	563874 abgekürzt	5638	74 ($245\frac{374}{2300}$
		2300	23	00
VI.	Beyspiel.	7427789728 (75896		
		97868		

III. HAUPTSTÜCK.

VON EINIGEN EIGENSCHAFTEN DER ZAHLEN.

I. ERKLÄRUNG.

56. Eine *Primzahl* ist diejenige, welche man durch keine Multiplication mit einer andern Zahl, außer mit 1, erhalten, folglich auch mit keiner andern Zahl als mit ihr selbst und mit 1 genau dividiren kann: dergleichen sind 1. 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. u. s. w. *Eine zusammen gesetzte Zahl* wird diejenige genannt, welche durch die Multiplication zweyer Zahlen entstehet, folglich auch einen andern Divisor, oder andere Divisoren, außer sich und 1, zuläßt. Z. B. 4 hat den Divisor 2; 6 hat die Divisoren 2 und 3; 8 hat die Divisoren 2 und 4; 28 hat die Divisoren 2 und 14, 4 und 7. Die Producte dieser Divisoren heißen *vielfache Theile* des Ganzen (Multipla).

II. ERKLÄRUNG.

57. *Gleiche Theile des Ganzen* sind diejenigen, welche, einige Mahle genommen, dem Ganzen gleich sind. Z. B. 3 ist ein gleicher Theil von der Zahl 12; denn vier Mahl genommen, ist er dieser Zahl gleich. *Ungleiche Theile des Ganzen* sind, welche, einige Mahle genommen, entweder

Partes quotae

Partes quantae

größser oder kleiner sind, als das Ganze. Z. B. 5 ist ein ungleicher Theil von der Zahl 12.

III. ERKLÄRUNG.

commensurabilia

58. *Gleichmessbare* Dinge heissen diejenigen, welche einen gemeinschaftlichen gleichen Theil haben, oder derer eines ein gleicher Theil des andern ist; z. B. 8 und 24 sind durch 2 durch 4 durch 8 messbar. *Ungleichmessbare*, die keinen gemeinschaftlichen gleichen Theil haben. Z. B. 8 und 21.

IV. ERKLÄRUNG.

pares numeri

59. Eine *gerade Zahl* ist diejenige, welche mit 2 dividiret werden kann, als: 2. 4. 8. u. s. f.

impares numeri

Eine *ungerade Zahl*, welche mit 2 nicht dividiret werden kann, und von einer geraden nur um eine Einheit abweicht, als 3. 5. 7.

I. FOLGERUNG.

60. Wenn man also die Zahlen nach der natürlichen Ordnung schreibet 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 u. s. w. so wechseln die geraden und ungeraden mit einander ab, und sind nur durch 1 unterschieden.

II. FOLGERUNG.

61. Man kann demnach eine zusammen gesetzte Zahl, welche am Ende eine gerade Zahl oder eine Nulle hat, mit 2 dividiren oder halbiren; denn 10, 20, 30 oder 100, 200 u. s. w. sind nach der vorhergehenden Folgerung gerade Zahlen; die aber am Ende eine ungerade Zahl hat, kann mit 2 nicht dividiret werden; denn sie wird immer um 1 größser seyn, als das Vielfache des Zweyers.

III. FOLGERUNG.

62. Jede Zahl, deren letzte Ziffer 5 oder 0 ist, kann mit 5 dividiret werden; denn keine Zahl hat am Ende 5 oder 0, welche nicht zugleich unter den Factoren, woraus

sie entstanden ist, einen Fünfer hätte, wie in der Pythagorischen Tafel bey den Producten des Fünfers zu ersehen ist; aber wenn ein Factor 5 ist, so kann mit diesem die gegebene Zahl, oder das Product dividiret werden; also läſst sich jede Zahl von der Art mit 5 dividiren.

IV. FOLGERUNG.

63. Wenn die Ziffern einer zusammen gesetzten Zahl, als bloſse Einheiten betrachtet, und in eine Summe gesammelt werden, welche die Zahl 9, ein Mahl oder mehr Mahl genommen, ausmachet, so kann die gegebene Zahl genau mit 9 dividiret werden. Z. B. 6894 in eine Summe zusammen gezählet, geben 27; denn 6 und 8 sind 14 und 9 sind 23, und 4 sind 27; aber 27 enthält genau drey Mahl 9; also kann auch die gegebene Zahl 6894 genau mit 9 dividiret werden. Wenn aber die auf solche Art gesammelten Ziffern eine Summe ausmachen, die sich mit 3 theilen läſst, so kann auch die ganze Zahl mit 3 dividiret werden. Z. B. 2886 gibt die Summe 24, die sich mit 3 theilen läſst; also kann auch die ganze Zahl mit 3 dividiret werden. Dieſs ist wieder in der Pythagorischen Tafel zu ersehen, wo alle Vielfachen von 9, als Einheiten betrachtet, und in eine Summe gesammelt, 9 Einheiten geben. Z. B. 54 das Product von 6 und 9, gibt 9 Einheiten; denn 5 und 4 sind 9, eben so von 72, wenn man die zwey Ziffern 7 und 2 zusammen zählet, so hat man 9 Einheiten u. s. w. Da 15 die Summe 6, oder 27 die Summe 9 gibt, und beydes 6 und 9 mit 3 sich theilen läſst, so kann auch 15 und 27 mit 3 dividiret werden. Der Grund aber liegt darin, daſs der Werth einer jeden Ziffer, sie mag was immer für eine Stelle einnehmen, niemahl 9 Einheiten übersteigen kann, es seyen nun einfache Einheiten, oder Einheiten von Zehnern, Hundertern, Tausendern, Millionen u. s. f. und daſs, wenn man auf mehrere Einheiten kommt, abermahl eine neue Stelle bestimmt werden muſs. Wenn man also was immer für eine Zahl mit 9 dividiret, so bleibet immer ein Rest, welcher

so viel Einheiten hat, als die addirten Ziffern der Zahl Einheiten ausmachen. Z. B. 15 mit 9 dividirt, gibt den Quotienten 1 mit dem Reste 6, welcher eben so viel macht, als 1 und 5 addiret; 34 mit 9 dividiret, gibt den Quotienten 3 mit dem Reste 7; der eben so viel beträgt, als 3 und 4 zusammen gezählet. Diese Reste werden also immer größer, je mehr man von einem Neuner abweicht, und sich dem andern nähert; und wenn gar kein Rest ist, so kann auch die gegebene Zahl zwischen 9 und 9 nicht enthalten seyn, sondern muſs aus lauter Neunern bestehen; daher sie auch durch diese sich theilen läſst.

V. ERKLÄRUNG.

64. Das *Maſs einer Zahl* sind die Divisoren, welche die Zahl genau dividiren. Das *höchste Maſs einer Zahl* ist der gröſste jener Divisoren, welcher, wenn die gegebene Zahl allein, ohne Beziehung auf eine andere, betrachtet wird, immer diese gegebene Zahl ist; denn jede Zahl ist ein Mahl in sich selbst enthalten. Das gemeinschaftliche Maſs zweyer oder mehrerer Zahlen ist der gemeinschaftliche Divisor von beyden; das gröſste Maſs ist der gröſste Divisor unter beyden. So hat 12 das Maſs 2, 3, 4, 6, unter denen, nach der Zahl 12, das gröſste Maſs 6 ist; aber 12 und 24 haben das gemeinschaftliche Maſs 4, das gröſste ist 12.

I. AUFGABE.

65. Alle Divisoren oder Factoren einer Zahl finden.

AUFLÖSUNG.

Wenn die gegebene Zahl gerade ist, so dividiret man sie mit 2; ist sie ungerade, so versuchet man die Division mit 3, 5, 7, u. s. f. zu machen. Gehet es mit diesen nicht, so ist die gegebene Zahl eine Primzahl. Hat man aber einen genauen Quotienten gefunden, so schreibet man den Quotienten und den Divisor ins besondere. Der Quotient wird dann wieder auf eben diese Art dividiret, und der Divisor abermahl angemerkt; und dieſs wird so oft wiederhohlet, bis der Quotient 1 ist: und so erhält man alle einfachen Divisoren der gegebenen Zahl. Wenn nun die einfachen Divisoren zwey und zwey, drey und drey mit einander multipliciret werden, so bekommt man alle zusammen gesetzten Divisoren.

Zum Beyspiele: Man soll die Divisoren der Zahl 420 suchen.

420 (210		210 (105		105 (35		35 (7		7 (1
2		2		3		5		7

Die einfachen Divisoren sind: 2, 2, 3, 5, 7.

Die zusammen gesetzten Divisoren sind

aus zwey:	2 mit 2 gibt 4	aus drey:	2 mit 2 und 3 gibt 12
	2 mit 3 gibt 6		2 mit 2 und 5 gibt 20
	2 mit 5 gibt 10		2 mit 2 und 7 gibt 28
	2 mit 7 gibt 14		2 mit 3 und 5 gibt 30
	3 mtt 5 gibt 15		2 mit 3 und 7 gibt 42
	3 mit 7 gibt 21		2 mit 5 und 7 gibt 70
	5 mit 7 gibt 35		3 mit 5 und 7 gibt 105

aus vier:	2 mit 2 und 3 und 5 gibt 60
	2 mit 2 und 3 und 7 gibt 84
	2 mit 2 und 5 und 7 gibt 140
	2 mit 3 und 5 und 7 gibt 210

aus fünf: 2 mit 2 und 3 und 5 und 7 gibt 420.

Es sind also der Ordnung nach folgende 24 Divisoren:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 20, 21
28, 30, 35, 42, 60, 70, 84, 105, 140, 210, 420.

BEWEIS.

Der Quotient, mit dem Divisor multipliciret, gibt das Product oder den Dividendus; also müſsen so wohl die Quotienten als die Divisoren, die gemeinschaftlichen Factoren der gegebenen Zahl seyn; da aber die einzelnen Quotienten, welche aus jeder Division entstehen, wieder das Product ihrer Divisoren und Quotienten sind, so werden alle mit einander multiplicirten Divisoren die Producte geben, welche eben so viele Divisoren der ganzen gegebenen Zahl seyn werden.

ANMERKUNG.

66. Diese und andere Eigenschaften können am leichtesten durch die Grundsätze der Algebra, welche allgemeine Beweise, und daher auf jeden besonderen Fall anwendbar sind, bewiesen werden.

IV. HAUPTSTÜCK.

VON DEN RECHNUNGSARTEN IN UNGLEICHNAHMIGEN GRÖSSEN ODER ZAHLEN.

I. ERKLÄRUNG.

67. *Ungleichnahmige Gröſsen*, von welchen hier gehandelt wird, sind diejenigen, welche Dinge von verschiedener Art und Benennung enthalten, doch so, daſs die kleinere Art in der gröſseren

enthalten sey, z. B. die Arten der Münzen, der Gewichte, der Zeiten, der Maſse u. s. w.

ANMERKUNG.

68. Um diese Gröſsen gehörig behandeln zu können, muſs man vorher wiſsen. wie viel Theile oder Einheiten der kleineren Art eine Einheit der gröſseren Art ausmachen, wozu folgende Tabelle dienen kann.

In gangbarer Münze.

Ein Kaiserthaler enthält	2 Gulden, oder 40 Groschen, oder 120 Kreuzer.
Ein Gulden	20 Groschen, oder 60 Kreuzer, oder 240 Pfenninge.
Ein Groschen	3 Kreuzer, oder 12 Pfenninge.
Ein Kreuzer	4 Pfenninge, oder 8 Heller.
Ein Pfenning	2 Heller.

In dem Gewichte.

Ein Zentner enthält . .	100 Pfund, oder 1600 Unzen, oder 3200 Loth.
Ein Pfund	16 Unzen, oder 32 Loth, oder 128 Drachmen.
Eine Unze	2 Loth, oder 8 Drachmen, oder 24 Scrupel.
Ein Loth	4 Drachmen, oder 12 Scrupel, oder 240 Gran.
Eine Drachme	3 Scrupel, oder 60 Gran.
Ein Scrupel	20 Gran.

In dem Längenmaſse.

Eine Klafter enthält . .	6 Schuh, oder 72 Zoll.
Ein Schuh	12 Zoll, oder 144 Linien.

Ein Zoll enthält	12	Linien, oder 144 Punkte.
Eine Linie	12	Punkte.

In dem geographischen Maſse.

Eine Meile enthält . .	4000	Schritte, oder 20000 Schuh.
Ein Schritt	5	Schuh, oder 20 Handbreiten.
Ein Schuh	4	Handbreiten, oder 16 Zoll.
Eine Handbreite	4	Zoll, oder 16 Gerstenkörner.
Ein Zoll	4	Gerstenkörner nach ihrer Breite genommen.

In der Zeit.

Ein Jahr enthält	$365\frac{1}{4}$	Tage, oder 8766 Stunden.
Ein Tag	24	Stunden, oder 1440 Minuten.
Eine Stunde	60	Minuten, oder 3600 Secunden.
Eine Minute	60	Secunden.

I. AUFGABE.

69. Ungleichnahmige Gröſsen addiren.

AUFLÖSUNG.

I. Man schreibt die gleichnahmigen Arten unter die gleichnahmigen; z. B. Kreuzer unter Kreuzer, Groschen unter Groschen, Gulden unter Gulden; Punkte unter Punkte, Linien unter Linien u. s. w.

II. Die Einheiten, Zehner u. s. f. einer jeden gleichnahmigen Art werden in eine Summe gesammelt, und, *so oft in der Summe der unte-*

ren Art die nächst folgende höhere Art enthalten ist, eben so oft wird diese Art von jener Summe abgezogen, und zur nächst folgenden höheren Art addiret, der Rest aber unter die Linie geschrieben. Z. B. es ist die Summe von 7 Kreuzern; da 3 Kreuzer einen Groschen machen, so ist der Groschen in 7 Kreuzern zwey Mahl enthalten; man nimmt also 2 Groschen weg und addiret sie zur folgenden Summe der Groschen, der Rest ist 1 Kreuzer u. s. w.

	Gl.	Gr.	Kr.
I. Beyspiel.	20	15	2
	35	18	1
	6	17	2
	63	11	2

Da in der Summe der 5 Kreuzer der Groschen ein Mahl enthalten ist, so wird 1 Groschen zur folgenden Art übertragen, und der Rest 2 als Summe der Kreuzer geschrieben. In der Summe der 51 Groschen ist der Gulden zwey Mahl enthalten, weil 20 Groschen einen Gulden machen; also wird der Rest 11 an die Stelle der Groschen geschrieben, und 2 zur folgenden Summe der 61 Gulden gezählet; folglich ist die Summe 63 Gulden. Auf diese Art werden folgende Beyspiele aufgelöset.

	Pfund.	Unzen.	Loth.	Drachm.	Scrup.
II. Beyspiel.	16	6	1	2	2
	0	7	1	3	0
	7	12	0	1	1
	24	10	1	3	0

	Klafter.	Schuhe,	Zoll.	Linien.	Punkte.
III. Beyspiel.	1	5	9	11	10
	4	3	7	6	5
	6	3	5	6	3

II. AUFGABE.

70. Ungleichnahmige Gröſsen subtrahiren.

AUFLÖSUNG.

I. Man schreibt die gleichnahmigen Arten unter die gleichnahmigen, wie vorher.

II. Man subtrahiret die Einheiten, Zehner u. s. f. einer jeden gleichnahmigen Art von den oben stehenden Einheiten der nähmlichen Art, und schreibt den Rest unter die Linie. Wenn eine abzuziehende Art gröſser ist, als die oben stehende, so wird von der nächst folgenden oberen Art eine Einheit entlehnet, welche dann in dieser Art eben so viel Einheiten gelten wird, als Einheiten dieser kleineren Art in der gröſseren enthalten sind. Z. B. man soll von 5 Groschen 17 subtrahiren; man entlehnet also von den Gulden eine Einheit, welche, an der Stelle der Groschen, 20 gilt, und mit den schon vorhandenen 5 Groschen, 25 ausmachet; werden nun davon 17 abgezogen, so bleibet ein Rest von 8 Groschen.

	Gl.	Gr.	Kr.
I. Beyspiel.	103	4	1
	16	15	2
	86	8	2

Da hier 2 Kreuzer von 1 abzuziehen sind, so wird ein Groschen übertragen, welcher 3 Kreuzer gilt; folglich hat man 4 Kreuzer; von diesen werden 2 Kreuzer abgezogen, und so bleiben 2 Kreuzer; zu den 3 übrigen Groschen entlehnet man 1 Gulden, das ist, 20 Groschen; also hat man 23 Groschen; werden nun 15 davon subtrahiret, so bleiben 8 Groschen. Endlich wenn man 16 Gulden von 102 Gulden subtrahiret, bleiben 86 Gulden.

	Sch.	Zoll.	Lin.	Punkt.
II. Beyspiel.	18	5	3	8
	6	11	8	10
	11	5	6	10

ANMERKUNG.

71. Um aller Irrung vorzubeugen, wird es dienlich seyn, wenn man in dem Falle, da eine abzuziehende Art gröſser ist als die oben stehende, und aus der folgenden eine Einheit entlehnet werden muſs, sogleich diese Einheit in Rücksicht ihres Werthes zur kleineren Art addiret, und hierauf die Subtraction nach den Regeln machet. In dieser Absicht wird das vorhergehende Beyspiel in folgendes verändert.

Sch.	Zoll.	Lin.	Punkt.
17	16	14	20
6	11	8	10
11	5	6	10

III. AUFGABE.

72. Ungleichnahmige Gröſsen multipliciren, oder einige Mahle nehmen.

AUFLÖSUNG.

I. Der Multiplicator wird unter die niedrigste Art geschrieben, und mit dieser und allen nach einander folgenden Arten multipliciret.

II. So oft in jeder Art die folgende obere enthalten ist, eben so oft wird diese davon abgezogen, und zur folgenden als eben so viel Einheiten addiret, wie in der Addition gemeldet worden ist.

I. Beyspiel. Es sind 30 Gl. 15 Grosch. 2 Kr. mit 60 zu multipliciren.

30	15	2
		60
1800	900	120

Nimmt man nun von den Kreuzern die Groschen so oft weg, als diese in denselben enthalten sind, so hat man 40 Groschen ohne Rest, folglich eine Summe von 940 Groschen; nimmt man wieder von diesen so oft die Gulden weg, als diese darin enthalten sind, so hat man 47 Gulden ohne Rest, also eine Summe von 1847 Gulden.

II. Beyspiel. Man soll 42 Schuhe, 7 Zoll, 8 Linien mit 40 multipliciren.

42	7	8
		40
1680	280	320

Das ist: wenn man von der Summe 320 so oft, als man kann, 12 Linien abziehet, nähmlich 26 Mahl, oder, was einerley ist, wenn man die Summe 320 mit 12 dividiret, so ist der Quotient 26 Zoll; es bleiben also 8 Linien an ihrem Platze, und 26 Zoll werden auf die Stelle der Zolle übertragen; folglich erhält man die Summe von 306 Zollen. Ferner wenn man 12 von der Stelle der Zolle 25 Mahl überträgt, so bleibet ein Rest von 6 Zollen; also bekommt man die Summe von 1705 Schuhen; und nun ist das ganze Product 1705 Schuhe, 6 Zoll, 8 Linien.

I. ANMERKUNG.

73. Mittels der Multiplication wird eine höhere Art zu einer niedrigeren reduciret. Man muſs nähmlich die höhere Art mit so viel Einheiten multipliciren, als in der niedrigeren Art Einheiten enthalten sind. So wird ein Gulden zu Kreuzern reduciret, wenn man ihn mit 60 multipliciret: ein Schuh zu Zollen, wenn man ihn mit 12 multipliciret; 3 Gulden sind 180 Kreuzer; 7 Schuhe geben 84 Zoll; 84 Zoll geben 1008 Linien.

II. ANMERKUNG.

74. Doch ist hier wohl zu merken, daſs die Multiplication auf solche Weise keineswegs durch die geringere Art

geschieht, sondern blofs durch eine Zahl, in so weit sie eine Sammlung von Einheiten ist; nähmlich man nimmt die andere Zahl so oft an, als die Einheit in dem Multiplicator enthalten ist. Daher mufs in diesem Falle die multiplicirende Zahl der kleineren Art nicht nach ihrer Benennung, und ihrem inneren Werthe, sondern nur nach ihrem Zahlenwerthe betrachtet werden. Denn, im eigentlichen Verstande, kann man solche Gröfsen weder mit einander multipliciren, noch ihren Werth mit Worten ausdrücken. Denn was sollte es wohl heifsen, 3 Gulden mit 15 Kreuzern multipliciren? Hieraus kann weder von Gulden noch von Kreuzern ein Product entstehen. Eben das würde seyn, wenn man 7 Schuhe mit 5 Zoll multipliciren wollte; das Product 35 können weder Schuhe noch Zolle seyn. Der Multiplicator mufs also immer abstract genommen, und wie aus der Beschaffenheit der Multiplication erhellet, jede andere Bedeutung, bis auf die Zahlenbedeutung, ausgeschlofsen werden. Hieraus wird man nun leicht erklären können, warum 2 Gulden, mit 3 Gulden multipliciret, das Product von 6 Gulden geben, die nähmlichen 2 Gulden aber, zu Kreuzern reducirt, das ist, 120 Kreuzer mit 180 Kreuzern multipliciret, in dem Producte 21600 Kreuzer, oder 360 Gulden ausmachen. Die Ursache ist einleuchtend: denn in dem ersten Producte sind 2 Gulden 3 Mahl genommen; in dem zweyten Producte sind die 2 Gulden 180 Mahl genommen, woraus natürlich eine verschiedene Summe entstehen mufs.

III. ANMERKUNG.

75. Es ereignet sich aber doch bisweilen, dafs eine Multiplication mit einer Zahl, auch nach ihrer Bedeutung und Benennung betrachtet, Statt zu haben scheint. Z. B. Geld mit Geld; Waare mit Preise; Arbeit mit Arbeitern; wie es bey der goldenen und Verhältnifs-Regel zu geschehen pflegt, von welcher wir in der Algebra handeln werden; oder da man Gröfsen eines Raumes mittels eines Mafses sucht, wovon in der Geometrie gehandelt wird; aber in dem ersten

Falle multipliciret man nur scheinbar auf diese Art; in der That werden auch nur eingebildete oder von Dingen abstrahirte Zahlen bey der Multiplication angenommen, damit man das gehörige Verhältniſs der Zahlen herausbringe, welches dann auf die darunter verstandenen Dinge angewandt werden könne. Z. B. es ist die Frage: wenn 1 Student 3 Gulden zahlt, wie viel werden 6 Studenten zahlen? Hier multiplicire ich zwar 3 mit 6, nehme aber 3 sechs Mahl an, entferne indeſs den Begriff von Studenten und Gulden, und betrachte 6 und 3 als bloſse Einheiten; und so bald die Multiplication fertig und das wahre Verhältniſs gefunden ist, lege ich ihnen wieder die gehörige Bedeutung bey. In dem zweyten Falle ist die Zahl, welche durch die Multiplication eines Maſses mit einem andern Maſse entsteht, eine Quadratzahl und von höherem Range, wie in der Geometrie gezeiget wird. Z. B. ein Zoll oder Schuh, mit einem Zolle oder Schuhe multipliciret, gibt einen Quadratzoll oder Quadratschuh, das ist nun ein Zoll oder Schuh von doppeltem Masse, der Länge und Breite zugleich; welches aber bey Münzen oder andern Dingen nicht Statt findet.

IV. AUFGABE.

76. Ungleichnahmige Gröſsen dividiren, oder in Theile abtheilen.

AUFLÖSUNG.

I. Man schreibt den Divisor unter die höchste Art, und sucht den Quotienten dieser Art.

II. Der Rest der vorhergehenden Art wird zu Einheiten der nächst folgenden Art reduciret, und zu derselben addiret; diese Art wird dann wieder dividiret und der letzte Rest wird ein Theil der untersten Art; wie bey der Division gesagt worden ist.

I. Beyspiel. 40 Gulden 54 Kreuzer sind in 9 Theile zu theilen.

Gl.	Kr.	Gl.	Kr.	Kr.
40	54	4	32	$\frac{6}{9}$
9	240			
36	294			
4	9			
	27			
	24			
	9			
	18			
	6			

9 in 40 ist 4 Mahl enthalten, und bleibet ein Rest von 4 Gulden; diese 4 Gulden zu Kreuzern reduciret, geben 240, und mit den 54 zusammen 294 Kreuzer; diese wieder mit 9 dividiret, geben 32 Kreuzer mit dem Reste 6.

II. Beyspiel. Es sind 19 Schuh, 8 Zoll und 6 Linien in 6 Theile zu theilen.

Schuh.	Zoll.	Lin.	Schuh.	Zoll.	Lin.
19	8	6	3	3	5
6	12	24			
18	20	30			
1	6	6			
	18	30			
	2	0			

ANMERKUNG.

77. Hier ist eben das zu merken, was oben in der Anmerk. bey der Multiplication gesagt worden ist. Der Divisor muſs also wieder als eine bloſse Zahl von Einheiten betrachtet werden, ohne auf irgend eine andere Bedeutung oder Benennung Rücksicht zu nehmen, und zwar aus den oben angeführten Gründen, derer Wiederhohlung hier überflüſsig seyn würde.

V. HAUPTSTÜCK.

ALLGEMEINE BEGRIFFE VON DEN BRÜCHEN.

I. ERKLÄRUNG.

78. Ein *Bruch* ist ein Theil des als Einheit betrachteten Ganzen, oder ein Theil der Einheit, folglich kleiner als 1. Denn jede Einheit oder jedes Ganze kann als etwas, das sich in mehrere gleiche Theile theilen läſst, betrachtet werden; nimmt man also nur einige Theile von diesem Ganzen oder dieser Einheit, so wird dieſs ein Bruch genannt. Z. B. wenn das Ganze in 6 gleiche Theile getheilet ist, und deren nur 5 genommen werden, so hat man 5 Sechstheile des Ganzen. Ein Kreuzer ist der sechzigste Theil eines Gulden, also ist das Ganze in 60 Theile getheilet; nimmt man nun davon 45 Theile, so wird man fünf und vierzig Sechzigsttheile haben.

FOLGERUNG.

79. Jeder Bruch muſs demnach zwey Zahlen haben: eine, welche die Theile anzeiget oder bestimmet, in welche das Ganze oder die Einheit als schon getheilet, angenommen wird; die andere, welche die Anzahl der Theile enthält, wie viel deren genommen werden; z. B. in dem obigen Falle benennet die Zahl 60 die Theile des Ganzen, und die Zahl 45 zählet die Theile, wie viel deren zu neh-

men sind. Da beyde Zahlen immer zugleich geschrieben werden müſsen, so steht die erstere unten, die letztere oben, und zwischen beyden wird eine Linie gezogen, als $\frac{45}{60}$. Aus dieser Folgerung flieſst

II. ERKLÄRUNG.

80. Der *Zähler* ist die obere Zahl, welche die Anzahl der Theile bestimmet, wie viel deren genommen werden; der *Nenner* ist die untere Zahl, welche erkläret, in wie viel Theile das Ganze oder die Einheit getheilet worden ist. Beyde Nahmen sind aus der Natur der Sache und aus der oben angeführten Bedeutung genommen; nähmlich der Nenner *benennet* die Theile, und der Zähler *zählet* die genommenen Theile.

ANMERKUNG.

81. Den wahren Begriff eines Bruches kann auch dasjenige geben, was von der Division in der I. Anmerkung (§. 49.) gesagt worden ist. Wenn nähmlich bey der Division am Ende ein Rest bleibet, so wird dieser ober der Linie, und der Divisor unter derselben gesetzt, welches anzeiget, daſs das Ganze oder die Einheit mehrere mittels des Divisors dargestellte Theile enthält, als in dem gegenwärtigen Falle genommen werden; daher denn die Division nicht weiter vor sich gehen kann, sondern wird nur angedeutet; da nun das nähmliche bey dem Bruche geschieht, wo wenigere Theile genommen werden, als das Ganze enthält, also wird bey der Division der Rest, unter welchen der Divisor geschrieben ist, als ein Bruch betrachtet, und jeder Bruch kann wieder als eine Division angesehen werden, in welcher der Zähler den Dividendus, der Nenner aber den Divisor vorstellet. Hieraus folgt nun wieder

III. ERKLÄRUNG.

82. Ein *eigentlicher* oder *ächter* Bruch ist

derjenige, deſsen Zähler kleiner ist, als der Nenner, z. B. $\frac{3}{4}$; ein *uneigentlicher* oder *unächter*, deſsen Zähler gröſser, als der Nenner, oder diesem gleich ist, z. B. $\frac{18}{6}$ oder $\frac{5}{5}$. Denn wenn mehrere Theile genommen werden, als diejenigen sind, in welche das Ganze getheilet wird, so hat man mehr als das Ganze; welches wider die Erklärung eines Bruches ist. Aus einem uneigentlichen Bruche wird das Ganze heraus gezogen, wenn man den Zähler mit dem Nenner dividiret; denn da jeder Bruch, wie in der vorhergehenden Anmerkung gesagt worden ist, als eine Division betrachtet werden kann, wo der Nenner der Divisor, und der Zähler der Dividendus ist; so folget, daſs, wenn der Divisor kleiner ist, als der Dividendus, noch eine Division vorgenommen, und ein Quotient gefunden, folglich der Bruch gehoben und reduciret werden kann. Von den hier oben angeführten uneigentlichen Brüchen ist also der erste 3 Ganzen, der zweyte 1 Ganzen gleich.

IV. ERKLÄRUNG.

83. Ein *einfacher* Bruch ist derjenige, welcher nur einen Zähler und einen Nenner hat, z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{17}$; ein *zusammengesetzter*, welcher auch *Bruch eines Bruches* heiſst, ist derjenige, der aus mehreren einfachen zusammen gesetzt ist; als $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{2}$ z. B. von einem halben Eimer Wein sollen wieder zwey Drittheile genommen werden. Man reduciret sie zu einem einfachen Bruche, wenn man sie, nach der im 104. §. vorkommenden Regel, mit einander multipliciret.

I. LEHRSATZ.

84. Ein Bruch ist so oft in dem Ganzen oder in der Einheit enthalten, als der Zähler in dem Nenner.

BEWEIS.

Der Nenner enthält so viel Einheiten, als das Ganze gleiche Theile hat; der Zähler aber enthält nur einige von diesen Theilen; der ganze Bruch hingegen ist selbst die Zahl der aus dem Ganzen genommenen Theile; also sind die genommenen Theile, der Zähler und der Bruch; die Theile selbst sind der Nenner und das Ganze oder die Einheit; folglich ist der Bruch so oft in dem Ganzen oder in der Einheit enthalten, als der Zähler in dem Nenner enthalten ist. Das heiſst: der Bruch verhält sich zu dem Ganzen, wie sich der Zähler zum Nenner verhält.

I. FOLGERUNG.

85. *Gleiche* Brüche sind also diejenigen, deren Zähler in ihren Nennern gleich oft enthalten sind; z. B. $\frac{1}{2}$ und $\frac{4}{8}$; ferner $\frac{8}{24}$ und $\frac{1}{3}$ und $\frac{90}{270}$. Ein *kleinerer* Bruch ist derjenige, deſsen Zähler in seinem Nenner öfter enthalten ist, als der Zähler des andern Bruches in dem seinigen; z. B. $\frac{2}{6}$ ist gröſser als $\frac{3}{24}$; ferner $\frac{5}{8}$ ist gröſser als $\frac{4}{7}$. Die Ursache davon ist diese: da der Nenner die Theile des Ganzen, der Zähler aber die genommenen Theile darstellet, so muſs man immer auf beyde Rücksicht nehmen; und wenn das nähmliche Ganze in verschiedene Theile z. B. nun in 12, dann in 18, dann in 24 getheilet wird, so müſsen nothwendig diese Theile um so viel kleiner seyn, je mehrere derselben sind; also muſs man auch mit verhältniſsmäſsiger Gröſse den Zähler vermehren; wenn man also vorher $\frac{6}{12}$ genommen hat, so müſsen nun $\frac{9}{18}$ oder $\frac{12}{24}$ genommen wer-

den, wenn anders eine Gleichheit bleiben soll. Wenn demnach beyde Theile mittels der Multiplication mit gleicher Gröſse wachsen, so bleibt der Bruch gleich; wird der Zähler mit einer höheren Gröſse multipliciret, als der Nenner, so wird der Bruch gröſser; wird der Nenner mit einer höheren Gröſse multipliciret als der Zähler, so wird der Bruch kleiner. Man kann dieses leicht daraus abnehmen, wenn man aufmerksam ist, wie oft der Zähler in seinem Nenner enthalten sey. Daher ist $\frac{2}{6}$ gröſser als $\frac{3}{24}$, weil 2 in 6 drey Mahl; hingegen 3 in 24 acht Mahl enthalten ist; denn der erste Quotient ist kleiner als der zweyte.

II. FOLGERUNG.

86. Hieraus kann man leicht die Verschiedenheit oder Gleichheit der Brüche bestimmen, welche sich anfangs nicht sogleich äuſsert; man multipliciret nähmlich den Zähler des einen Bruches mit dem Nenner des andern; geben sie gleiche Producte, so sind auch die Brüche gleich; gibt aber der Zähler des einen, mit dem Nenner des andern multipliciret, ein gröſseres Product, so ist auch jener Bruch gröſser. Daher sind $\frac{8}{24}$ und $\frac{1}{3}$ gleiche Brüche, weil die Producte eines jeden Zählers, mit dem Nenner des andern Bruches multipliciret, gleich sind. $\frac{5}{8}$ ist gröſser als $\frac{4}{7}$, denn 5 mit 7 multipliciret, gibt 35; aber 4 mit 8 multipliciret, gibt nur 32. Sind die Nenner gleich, so wird derjenige Bruch gröſser seyn, welcher einen gröſseren Zähler hat; z. B. $\frac{5}{7}$ ist grösser als $\frac{3}{7}$. Sind die Zähler gleich, so ist derjenige Bruch gröſser, welcher einen kleineren Nenner hat, $\frac{3}{4}$ ist gröſser als $\frac{3}{7}$; denn der Bruch verhält sich immer zu dem Ganzen, wie der Zähler zum Nenner (§. 84.)

V. ERKLÄRUNG.

87. Wenn nebst dem Bruche noch eine ganze Zahl vorhanden ist, so nennt man dieſs eine *gemischte* Zahl. Z. B. $8\frac{3}{4}$.

II. LEHRSATZ.

88. Wenn man beyde Zahlen des Bruches, nähmlich den Zähler und den Nenner, mit gleicher Gröſse multipliciret oder dividiret, so wird dadurch der Werth des Bruches nicht verändert.

BEWEIS.

Durch die Multiplication des Zählers wird der Bruch so viel Mahl vergröſsert, als der Multiplicator Einheiten enthält, z. B. wenn man von $\frac{3}{5}$ den Zähler mit 2 multipliciret, so hat man $\frac{6}{5}$, eine Gröſse, welche noch ein Mahl so groſs ist, als die vorhergehende, indem um so viel mehrere Theile genommen werden; durch die Multiplication des Nenners wird die Gröſse so viel Mahl vermindert, als der Multiplicator Einheiten enthält; z. B. wenn man von $\frac{6}{5}$ den Nenner mit 2 multipliciret, so hat man $\frac{6}{10}$, eine Gröſse, welche noch ein Mahl so klein ist, als die vorhergehende, indem die Theile eben deſselben Ganzen vermehret und kleiner gemacht, und doch deren nicht mehrere genommen werden. Eine Gröſse wird demnach in gleichem Maſse vermehret und vermindert, folglich bleibt sie unverändert und $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$. Durch die Division des Zählers eines Bruches wird die Gröſse so viel Mahl vermindert, als der Divisor Einheiten enthält, z. B. wenn von $\frac{6}{10}$ der Zähler mit 2 dividiret wird, so hat man $\frac{3}{10}$, das ist, die Hälfte des vorhergehenden; dividiret man von $\frac{3}{10}$ den Nenner mit 2, so hat man $\frac{3}{5}$, eine Gröſse, die zwey Mahl so groſs ist als die vorhergehende, indem statt drey Zehntheile nun drey Fünftheile, das ist, doppelt so große Theile genommen werden; also wird eine Größe in gleichem Maße vermehret und vermindert; folglich bleibt sie unverändert, und $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. Wenn man also beyde Zahlen des Bruches mit der nähmlichen Größe multipliciret oder dividiret, so wird dadurch der Werth des Bruches nicht verändert.

FOLGERUNG.

89. Hieraus erhellet, auf welche Art verschiedene Brüche, sie mögen mit noch so großen Zahlen ausgedrückt seyn, mit einem anderen Bruche, der aus noch so kleinen Zahlen besteht, im Werthe gleich bleiben, und zu diesem reducirt werden können; denn wenn man den gemeinschaftlichen Factor, und zwar den größten findet, welcher so wohl den Zähler als den Nenner genau dividiret, so kann durch denselben die Division gemacht, und an die Stelle der vorigen Größen können die gefundenen Quotienten, welche mit dem vorigen Bruche von gleichem Werthe sind, geschrieben werden. Der gemeinschaftliche Factor heißt *das gemeinschaftliche größte Maß* (§. 64.).

I. AUFGABE.

90. Das größte gemeinschaftliche Maß eines gegebenen Bruches finden.

AUFLÖSUNG.

I. Man dividiret den Nenner mit dem Zähler, und wenn kein Rest bleibet, so ist der Zähler das gemeinschaftliche Maß, z. B. $\frac{7}{56}$; da 56, mit 7 dividiret, keinen Rest gibt, so ist 7 das gemeinschaftliche Maß.

II. Wenn nach der ersten Division ein Rest bleibet, so wird die Division dergestalt fortgesetzt, daß der vorige Divisor immer der Dividendus, der Rest aber der Divisor wird, und diefs so lange, bis kein Rest mehr bleibet; dann ist der letzte Divisor jedes Mahl das gemeinschaftliche Mafs. Kommt man aber am Ende auf 1, so ist es ein Zeichen, dafs der Bruch kein anderes gemeinschaftliches gröfstes Mafs habe, als die Einheit.

I. Beyspiel. Man suche das gemeinschaftliche Mafs von dem Bruche $\frac{252}{315}$.

Man dividiret 315 mit 252 nach den bekannten Regeln der Division; und nach dieser ersten Division ist der Rest 63, welcher in der zweyten Division der Divisor wird; der vorige Divisor 252 aber wird der Dividendus. . . . .

$$\begin{array}{r} 315 \;(1 \\ 252 \\ \underline{252} \\ 63 \end{array}$$

Also 252 mit 63 dividiret, gibt den Quotienten 4, und nach geschehener Multiplication und Subtraction bleibet kein Rest; also ist der letzte Divisor 63 das gemeinschaftliche Mafs.

$$\begin{array}{r} 252 \;(4 \\ 63 \\ \underline{252} \\ 0 \end{array}$$

BEWEIS.

Der gemeinschaftliche Factor, welcher so wohl den Dividendus als den Divisor genau dividiret, ist das gemeinschaftliche Mafs; auf diese Art aber findet man den gemeinschaftlichen Factor; denn die Division löset dasjenige auf, was die Multiplication zusammen setzt; da also der letzte Divisor zugleich der Divisor des vorigen Divisors, und dieser wieder des vorigen Divisor ist, und so fort bis zu dem ersten Divisor oder dem Zähler selbst, welcher zugleich der Divisor des Nenners ist, so zeiget es sich am Ende, dafs der letzte Divisor einer aus den Factoren ist, welcher so wohl den Zähler als den Nenner genau dividiret. So misst in dem angeführten Beyspiele, 63 genau die Zahl 252, oder den Zähler; dieser aber misst den Nenner 315 mit dem Reste 63, von welchem Reste wieder 63 das Mass ist; also ist 63 der Factor, welcher, einige Mahle genommen, so wohl den Zähler als den Nenner ausmachet, und daher auch das Product auflöset. Denn bey der letzten Division ist 252 gleich 63, mit 4 multipliciret; und 315 ist gleich 63, mit 4 multipliciret, und 63 addiret, das ist, 63 mit 5 multipliciret, also 63 ein Mahl mit 4, und ein Mahl mit 5 multipliciret, macht den gegebenen Bruch.

II. Beyspiel. Man suche das gemeinschaftliche Mass des Bruches $\frac{189}{513}$.

Man dividiret 513 mit 189, so ist der Rest 135. Der folgende Dividendus ist der vorige Divisor 189. Der Divisor aber ist der Rest 135. Nach vollendeter Division bleibt der Rest 54; dieser wird der folgende Divisor, und der vorige Divisor 135 wird der Dividendus. Nach dieser Division erhält man den Rest 27, und wenn man mit diesem den vorigen Divisor 54 dividiret, so bleibet kein Rest; also ist das gemeinschaftliche Mass der letzte Divisor 27.

$$\begin{array}{rl}
513 & (2 \\
189 & \\
\underline{378} & \\
135 & \\
\cdots\cdots & \\
189 & (1 \\
135 & \\
\underline{135} & \\
54 & \\
\cdots\cdots & \\
135 & (2 \\
54 & \\
\underline{108} & \\
27 & \\
\cdots\cdots & \\
54 & (2 \\
27 & \\
\underline{54} & \\
0 &
\end{array}$$

ANMERKUNG.

91. Man muſs sich hier an dasjenige erinnern, was in dem III. Hauptst. von der Erfindung der Divisoren, und von den Eigenschaften der Zahlen gesagt worden ist, nähmlich: wenn so wohl in dem Zähler als in dem Nenner am Ende eine Nulle ist, so gibt 10 das gemeinschaftliche Maſs; sind überall zwey Nullen, so gibt 100 das gemeinschaftliche Maſs, und so weiter. Ist am Ende 5 oder 0, so ist 5 das gemeinschaftl. Maſs; ist am Ende eine gerade Zahl, so ist 2 das gemeischaftl. Maſs; auch läſst sich hier dasjenige anwenden, was dort von dem Dreyer und Neuner gesagt worden ist.

II. AUFGABE.

92. Einen gegebenen Bruch zu den kleinsten Zahlen reduciren, ohne den Werth des Bruches zu verändern.

AUFLÖSUNG.

I. Man suchet das gemeinschaftliche gröſste Maſs.

II. Mit diesem dividiret man so wohl den Zähler als den Nenner; dann sind die gefundenen Quotienten der Bruch in den kleinsten Zahlen.

Z. B. $\frac{252}{315}$ wird durch den Divisor 63 zu $\frac{4}{5}$ reduciret.
$\frac{189}{513}$ durch den Divisor 27 zu $\frac{7}{19}$;
$\frac{255}{663}$ zu $\frac{5}{13}$; $\frac{481}{629}$ zu $\frac{13}{17}$; $\frac{171}{399}$ zu $\frac{3}{7}$;
$\frac{83}{415}$ zu $\frac{1}{5}$; $\frac{6}{264}$ zu $\frac{1}{44}$.
Ferner $\frac{60}{90}$ zu $\frac{6}{9}$ und $\frac{2}{3}$; $\frac{100}{150}$ zu $\frac{10}{15}$ und $\frac{2}{3}$;
$\frac{125}{450}$ zu $\frac{25}{90}$ und $\frac{5}{18}$.

Ferner aus $\frac{192}{256}$ werden diese halben Brüche gemacht: $\frac{96}{128}$, $\frac{48}{64}$, $\frac{24}{32}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{3}{4}$; denn da jeder dieser Brüche am Ende eine gerade Zahl hat, so kann immer die Division mit 2 fortgesetzt werden.

BEWEIS.

Wenn man so wohl den Zähler als den Nenner mit der nähmlichen Gröſse dividiret, so wird der Werth des Bruches nicht verändert (nach dem vorhergehenden Lehrsatze); nun wird mit dem gemeinschaftlichen gröſsten Maſse, als mit der nähmlichen Gröſse, so wohl der Zähler als der Nenner dividiret; also wird der Werth nicht verändert; und da das gemeinschaftliche Maſs das gröſste ist, so gibt es zugleich die kleinsten Quotienten; also ist auf diese Art der Bruch zu den kleinsten Zahlen reduciret.

III. AUFGABE.

93. Eine ganze Zahl zu einem Bruche machen, oder reduciren.

AUFLÖSUNG.

Man schreibet unter die ganze Zahl 1, welches den Nenner vorstellet; z. B. aus 8 wird $\frac{8}{1}$; aus 32 wird $\frac{32}{1}$.

BEWEIS.

Jede Zahl kann ohne Veränderung ihres Werthes mit 1 dividiret werden, also kann auch unter ein Ganzes 1 als Divisor geschrieben werden; nun aber entstehet auf diese Art eine gebrochene Zahl; also läſst sich auf diese Art jede Zahl zu einem Bruche reduciren.

IV. AUFGABE.

94. Ein Ganzes zu einem Bruche, wozu der Nenner gegeben ist, reduciren.

AUFLÖSUNG.

Man mnltipliciret das Ganze mit dem gegebenen Nenner, dann wird das Product der Zähler seyn, unter welchen der gegebene Nenner geschrieben wird. So wird 8 zum Bruche, wozu 6 der Nenner ist, reduciret, wenn man 8 mit 6 multipliciret, und den Nenner 6 darunter schreibet; also wird $\frac{48}{6}$.

BEWEIS.

Wenn man den Zähler und den Nenner mit der nähmlichen Gröſse multipliciret und dividiret, so wird der Werth nicht verändert; nun aber wird nach der obigen Regel das gegebene Ganze mit der nähmlichen Gröſse multipliciret und dividiret; also wird der Werth nicht verändert, folglich wird auch das Ganze auf diese Art richtig reduciret.

FOLGERUNG.

95. Dieſs zeiget sich noch deutlicher, wenn man mit dem Nenner wieder den Zähler dividiret, dann wird das vorige Ganze erscheinen; denn die Division muſs dasjenige auflösen, was die Multiplication zusammen setzt.

ANMERKUNG.

96. Die Reducirung eines Bruches, oder die Veränderung deſselben in einen andern, wozu der Nenner gegeben ist, wird in der Algebra bey den Regeln der Proportionen erkläret.

V. AUFGABE.

97. Brüche von verschiedenen Nennern zu Brüchen von gleichem Nenner reduciren.

AUFLÖSUNG.

I. Man multipliciret den Zähler eines jeden Bruches mit allen Nennern, nur den eigenen ausgenommen, so zwar, daſs man das Product, welches aus dem Zähler des ersten Bruches, und dem Nenner des zweyten entstanden ist, mit dem Nenner des dritten multipliciret; dieses wird wieder mit dem Nenner des vierten Bruches und so weiter multipliciret. Hierauf multipliciret man den Zähler des zweyten Bruches mit den Nennern des ersten, dritten, vierten u. s. f. Jedes Product, welches aus einem Zähler und den Nennern der andern Brüche entstanden ist, wird dann der Zähler desjenigen Bruches seyn, deſsen Zähler multipliciret worden ist.

II. Alsdann multipliciret man alle Nenner mit einander, und das Product wird der gemeinschaftliche Nenner seyn. So reduciret man $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ zu dem nähmlichen Nenner, wenn man sagt: 2 Mahl 4 gibt 8, welches der Zähler des ersten Bruches ist; dann 3 Mahl 3 gibt 9, welches der Zähler des zweyten Bruches ist. Endlich 3 Mahl 4 gibt 12, den gemeinschaftlichen Nenner beyder Brüche. Man hat also diese reducirten Brüche $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$ oder zusammen $\frac{8 \text{ und } 9}{12}$

$\frac{3}{7}$, $\frac{2}{3}$, und $\frac{4}{5}$ werden zu dem nähmlichen Nenner reduciret, wenn man sagt: 3 Mahl 3 gibt 9; und 9 Mahl 5 gibt 45, welches der Zähler des ersten Bruches ist; dann 2 Mahl 7 gibt 14; und 14 Mahl 5 gibt 70, den Zähler des zweyten Bruches; endlich 4 Mahl 7 gibt 28; und 28 Mahl 3 gibt 84, den Zähler des dritten Bruches, nähmlich der Zähler des ersten Bruches, mit dem Nenner des zweyten und dritten multipliciret, gibt den Zähler des ersten Bruches; der Zähler des zweyten, mit dem Nenner des ersten und dritten multipliciret, gibt den Zähler des zweyten; und der Zähler des dritten, mit dem Nenner des ersten und zweyten multipliciret, gibt den Zähler des dritten. Den gemeinschaftlichen Nenner gibt das Product 7 mit 3, welches 21 ist; und dieses wird wieder mit 5 multipliciret, welches 105 gleich ist. Hierdurch erlangt man also diese reducirten Brüche $\frac{45}{105}$, $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, oder $\frac{45 \cdot 70 \cdot 84}{105}$.

BEWEIS.

Der Werth eines Bruches wird nicht verändert, wenn man so wohl den Zähler als den Nenner mit der nähmlichen Gröſse multipliciret; nun aber werden nach den obigen Regeln der Zähler und der Nenner eines jeden Bruches mit der nähmlichen Gröſse multipliciret; denn beyde werden mit den Nennern der übrigen Brüche multipliciret; also wird der Werth nicht verändert; und da die nähmlichen Factoren das nähmliche Product geben müſsen, so gibt der Nenner eines jeden Bruches, mit den Nennern der andern Brüche multipliciret, das nähmliche Product, also auch gleichen Nenner.

ANMERKUNG.

98. Dieſs kann auch auf folgende Art gemacht werden: man multipliciret die Nenner mit einander, wodurch man den gemeinschaftlichen Nenner erhält. Jeder Zähler wird mit dem gemeinschaftlichen Nenner multipliciret, und das Product mit dem eigenen Nenner dividiret, dann wird der Quotient der neue Zähler seyn. Die Ursache ist hier die nähmliche, wie in dem vorhergehenden. Der Nenner wird mit den andern Nennern multipliciret, und da der Zähler, welcher mit dem ganzen Producte der Nenner multipliciret wird, auf diese Art zugleich mit seinem eigenen Nenner multipli-

ciret wird, so mufs er mit diesem abermahl dividiret werden, damit man gleiche Factoren in beyden, so wohl in dem Zähler, als in dem Nenner erhalte.

Z. B. $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{7}$, geben $\frac{105\quad 112\quad 200}{280}$
$\frac{9}{10}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{6}$, geben $\frac{648\quad 420\quad 600}{720}$.

VI. HAUPTSTÜCK.

VON DEN RECHNUNGSARTEN IN BRÜCHEN.

I. AUFGABE.

99. Brüche addiren.

AUFLÖSUNG.

I. Man reduciret die Brüche zu einem gemeinschaftlichen Nenner, wenn sie diesen nicht schon eher haben.

II. Dann werden die Zähler addiret.

Z. B. $\frac{2}{5}$ und $\frac{4}{5}$ geben $\frac{6}{5}$; $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{8}$ geben $\frac{8}{8}$.
Ferner $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ geben $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$ das ist $\frac{17}{12}$.
Ferner $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$ geben $\frac{35}{70}$, $\frac{42}{70}$, $\frac{20}{70}$, das ist $\frac{97}{70}$.

BEWEIS.

Wenn die Brüche verschiedene Nenner haben, so sind sie ungleichnahmige Gröfsen; denn etwas anders sind Viertheile, etwas anders Fünftheile, etwas anders Sechzigsttheile, welche man nicht addiren kann, wenn sie nicht gleichnahmig gemacht werden; dieſs aber geschieht, wenn man sie zu einem gemeinschaftlichen Nenner reduciret. Hernach, da die Zähler die Anzahl der Theile anzeigen, die Addition aber eine Sammlung der Theile ist, so müſsen bloſs die Zähler addiret werden, um die Summe aller Theile zu bekommen.

I. ANMERKUNG.

100. Wenn eine gemischte Zahl, das ist, eine ganze Zahl mit gebrochenen gegeben wird, so muſs die ganze Zahl zu einem Bruche, wozu der Nenner gegeben ist, reduciret, und die Zähler müſsen addiret werden. Z. B. aus 8 und $\frac{1}{3}$ wird $\frac{24}{3}$ und $\frac{1}{3}$, das ist $\frac{25}{3}$. Auf diese Art wird jede gemischte Zahl zu einem einzigen Bruche reduciret.

II. ANMERKUNG.

101. Ist die Summe ein unächter oder uneigentlicher Bruch, so wird sie mittels der Division des Zählers mit dem Nenner, zu Ganzen aufgelöset; oder wenn sie mit gröſseren Zahlen, die sich dividiren laſsen, ausgedrückt ist, so wird sie zu den kleinsten Zahlen reduciret. Z. B. die obigen Summen $\frac{6}{5}$ geben $1\frac{1}{5}$, $\frac{8}{8}$ geben 1; $\frac{17}{12}$ geben $1\frac{5}{12}$; $\frac{97}{70}$ geben $1\frac{27}{70}$.

II. AUFGABE.

102. Brüche subtrahiren.

AUFLÖSUNG.

I. Man reduciret die Brüche zu einem gemeinschaftlichen Nenner, wenn sie diesen nicht schon vorher haben.

II. Der kleinere Zähler wird von dem grösseren subtrahiret.

Z. B. $\frac{2}{5}$ von $\frac{4}{5}$, bleiben $\frac{2}{5}$. Ferner $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{6}$, bleiben $\frac{3}{18}$.

BEWEIS.

Ungleichnahmige Grössen, dergleichen auch Brüche von verschiedener Benennung sind, lassen sich von einander nicht subtrahiren; sie müssen also zu einer gemeinschaftlichen Benennung reduciret werden; und da man den Unterschied der Theile suchet, so ist die kleinere Zahl der Theile von der grösseren, das ist der kleinere Zähler von dem grösseren zu subtrahiren.

ANMERKUNG.

103. Wenn ganze Zahlen, oder auch gemischte vorhanden sind, so werden sie auf die nähmliche Art zu Brüchen reduciret. Z. B. man soll $\frac{2}{3}$ von $2\frac{1}{2}$ subtrahiren; so hat man zuerst aus dem letzteren $\frac{5}{2}$ (§. 94.) zu machen, und dann $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{2}$ zu subtrahiren. Diese beyden Brüche zu einem gemeinschaftlichen Nenner reduciret, geben $\frac{4}{6}$ und $\frac{15}{6}$; endlich $\frac{4}{6}$ von $\frac{15}{6}$ subtrahiret, gibt den Unterschied $\frac{11}{6}$, einen uneigentlichen Bruch, welcher in $1\frac{5}{6}$ aufgelöset wird.

III. AUFGABE.

104. Brüche multipliciren.

AUFLÖSUNG.

I. Man multipliciret die Zähler mit einander, und das Product wird der neue Zähler.

II. Dann multipliciret man die Nenner mit einander, und das Product wird der neue Nenner.

Z. B. $\frac{3}{4}$ mit $\frac{7}{8}$ multipliciret, gibt $\frac{21}{32}$.

Ferner $\frac{9}{15}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciret, gibt $\frac{18}{45}$.

BEWEIS.

Entweder wird ein Bruch mit einem Ganzen, oder ein Ganzes mit einem Bruche, oder ein

Bruch mit einem Bruche multipliciret; für jeden Fall dient diese Hauptregel: multipliciren heiſst eine Zahl so oft nehmen, als in dem andern Factor Einheiten sind; wenn $\frac{3}{4}$ zwey Mahl zu nehmen, oder zwey Mahl zu addiren sind, so hat man $\frac{3}{4}$ und $\frac{3}{4}$, das ist $\frac{6}{4}$; denn die Nenner bleiben bey der Addition stehen. Wenn $\frac{3}{4}$ fünf Mahl zu nehmen sind, hat man $\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}$ oder $\frac{15}{4}$, indem man die Zähler so oft addiret, als der Bruch genommen werden muſs; aber statt der wiederhohlten Addition braucht man die Multiplication; also wird der Zähler mit dem andern Factor multipliciret, wenn dieser ein Ganzes ist; z. B. $\frac{3}{4}$ mit 2 multipliciret, gibt $\frac{6}{4}$; und $\frac{3}{4}$ mit 5 multipliciret, gibt $\frac{15}{4}$. Wenn nun das Ganze als ein Bruch vorgestellet wird, so ist $\frac{3}{4}$, mit $\frac{5}{1}$ multipliciret, $\frac{15}{4}$ gleich; das ist, die Zähler werden mit einander, und auch die Nenner mit einander multipliciret. Wenn 3 mit $\frac{1}{2}$ zu multipliciren ist, so kann es weder ein Mahl genommen, noch addiret werden; denn würde es mit 1 multipliciret, so würde es ein Mahl genommen; wenn es also mit $\frac{1}{2}$ multipliciret wird, so kann es nicht ein Mahl, sondern nur um seinen halben Theil genommen werden; das ist, es wird mit 2 dividiret, welches man mit $\frac{3}{2}$ ausdrücket. Wenn 3 mit $\frac{1}{5}$ zu multipliciren ist, so wird 3 nur um seinen fünften Theil gesetzt, das ist, mit 5 dividiret, welches man mit $\frac{3}{5}$ ausdrückt. Wenn also 3 als ein Bruch vorgestellet werden soll, so ist $\frac{3}{1}$, mit $\frac{1}{2}$ multipliciret, $\frac{3}{2}$ gleich, und $\frac{3}{1}$, mit $\frac{1}{5}$ multipliciret, ist $\frac{3}{5}$ gleich; das heiſst wieder, die Zähler werden mit einander, und auch die Nenner mit einander multipliciret. Hätte man demnach $\frac{3}{4}$ mit $\frac{7}{8}$ zu multipliciren, so wäre $\frac{3}{4}$ zwar sieben Mahl zu nehmen, wie es der Zähler 7 andeutet, aber auch zugleich acht Mahl zu dividiren, wie es der Nenner 8 anzeiget; wenn man also nach dem, was vorher bewiesen worden ist, den Zähler sieben Mahl nimmt, so wird er mit 7 multipliciret; und wenn man mit 8 dividiret, so wird der Nenner mit 8 multipliciret; folglich werden überhaupt die Zähler mit einander, und auch die Nenner mit einander multipliciret.

IV. AUFGABE.

105. Brüche dividiren.

AUFLÖSUNG.

I. Man kehret die Zahlen des Divisors dergestalt um, daſs der Zähler die Stelle des Nenners, dieser aber die Stelle des Zählers einnimmt.

II. Hierauf multipliciret man eben so, wie bey der Multiplication der Brüche im vorhergehenden §. gesagt worden ist.

Z. B. $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ dividiret, gibt $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{1}$ multipliciret, welches $\frac{6}{4}$ gleich ist.

$\frac{4}{9}$ mit $\frac{2}{5}$ dividiret, gibt $\frac{4}{9}$ mit $\frac{5}{2}$ multipliciret, welches $\frac{20}{18}$ gleich ist.

BEWEIS.

Entweder wird ein Bruch mit einem Ganzen, oder ein Ganzes mit einem Bruche, oder ein Bruch mit einem Bruche dividiret; in jedem Falle zeiget der Divisor an, in wie viel Theile das Ganze dividiret werden soll; nun aber zeiget dieſs in Brüchen der Nenner an, also muſs eigentlich der Nenner, nicht der Zähler, den Divisor machen; wäre 2 in 3 Theile zu theilen, so würde 3 der Nenner seyn; wenn also $\frac{1}{2}$ in 3 Theile zu dividiren ist, so muſs auch 3 der Nenner seyn; da aber das Ganze schon vorher, als in zwey Theile getheilet, angenommen wird, und nun diese halben Theile wieder in 3 zu theilen sind, so müfsen diese beyden Divisoren mit einander multipliciret werden, und so erhält man $\frac{1}{2}$ mit 3 dividiret, welches $\frac{1}{6}$ gleich ist. Denn wenn das Ganze als ein Bruch dargestellet wird, so stehet $\frac{1}{2}$, mit $\frac{3}{1}$ dividiret; um vorerwähnte Multiplication machen zu können, kehret man den Divisor um; und dann wird $\frac{1}{2}$, mit $\frac{1}{3}$ multipliciret, der Quotient $\frac{1}{6}$ seyn; das heifst, die Multiplication geschieht mit umgekehrtem Divisor.

Soll ein Ganzes mit einem Bruche dividiret werden, z. B. 3 mit $\frac{1}{2}$; so ist, wenn das Ganze mit 1 dividiret wird, der Quotient dem Ganzen gleich; wird also das Ganze mit einem Bruche dividiret, so mufs der Quotient gröfser seyn als das Ganze, oder die Theile des Ganzen müfsen je mehrere seyn, je kleinere genommen werden; nimmt man halbe Theile, so müfsen sie zwey Mahl mehr seyn; und nimmt man Drittheile, so müfsen sie drey Mahl mehr seyn, und so fort; wenn also 3 mit $\frac{1}{2}$ zu dividiren, oder halbe Theile zu nehmen sind, so wird 3 in zwey Mahl mehrere Theile verändert, das ist, mit 2 multipliciret; also mufs der Nenner des Bruches mit dem Ganzen multipliciret werden. Wenn das Ganze als ein Bruch vorgestellet wird, nähmlich $\frac{3}{1}$, so mufs man $\frac{1}{2}$ umkehren, um die vorerwähnte Multiplication machen zu können; das heifst nun wieder, die Multiplication geschieht mit umgekehrtem Divisor.

Ist endlich ein Bruch mit einem Bruche zu dividiren z. B. $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{5}$, so müfsen, wenn $\frac{3}{4}$ in Fünftheile zu verändern sind, mehrere und kleinere Theile werden, welches man durch die Multiplication des Zählers 3 mit 5 erlanget; und da man in 2 solche Theile zu dividiren hat, so wird der Nenner 4 zwey Mahl genommen, oder mit 2 multipliciret; also geschieht auch hier die Multiplication mit umgekehrtem Divisor.

Der nähmliche Beweis ist anwendbar, wenn die Brüche zu einem gemeinschaftlichen Nenner reduciret werden, wo der Zähler des Dividendus, mit dem Zähler des Divisors dividiret, den Quotienten gibt; $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ dividiret, das heiſst, $\frac{6}{8}$ mit $\frac{4}{8}$ dividiret, gibt $\frac{48}{32}$, oder in kleineren Zahlen ausgedrückt, $\frac{6}{4}$, wie wir vorher gefunden haben.

FOLGERUNG.

106. Hieraus erhellet, daſs durch die Multiplication der Brüche der Werth vermindert, durch die Division aber vermehret wird; denn im ersten Falle geschieht wirklich eine Division, im zweyten eine Multiplication; denn wenn die halbe Gröſse genommen wird, welches durch die Multiplication mit $\frac{1}{2}$ oder einem andern Bruche geschieht, so wird dieselbe an sich selbst in zwey oder mehrere Theile, nach dem Inhalte des Nenners, dividiret; wenn aber das Ganze in halbe Theile, Drittheile, Viertheile zu dividiren ist, welches durch die Division der Brüche geschieht, so müſsen nothwendig mehrere Theile, oder eine gröſsere Zahl hervor kommen, z. B. 4 mit $\frac{1}{2}$ multipliciret, oder die Hälfte von 4, ist 2; hingegen 4 in halbe Theile getheilet, oder 4 mit $\frac{1}{2}$ dividiret, ist 8.

VII. HAUPTSTÜCK.

VON DEN ZEHNTHEILIGEN BRÜCHEN.

I. ERKLÄRUNG.

107. Ein *zehntheiliger Bruch* oder *Decimal-Bruch* ist derjenige, deſsen Nenner 10, oder ein Vielfaches von 10 mit 10 ist, oder deſsen Nenner aus einer Einheit mit angehängten Nullen besteht. Z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{5}{1000}$ u. s. f. Drey Zehntheile, sieben Hunderttheile, fünf Tausendtheile,

I. FOLGERUNG.

108. Da also alle diese Brüche bloſs durch die Anzahl der Nullen in dem Nenner unterschieden sind, so können die Nenner wegbleiben; nur muſs in den Zählern angezeigt werden, wie viel Nullen nebst der Einheit in dem Nenner seyn sollen. Dieſs kann aber durch die bloſse Zifferstellung geschehen, welche die Zähler von der Linken zur Rechten einnehmen, folglich kann man die Nenner glatterdings weglaſsen. Wenn nähmlich der Zähler den ersten Platz einnimmt, so wird sein Nenner nur eine Nulle haben, das ist, er wird 10 seyn; stehet der Zähler auf dem zweyten Platze, so wird sein Nenner 2 Nullen haben, oder, er ist 100. Behauptet der Zähler den dritten Platz, so wird sein Nenner 3 Nullen haben, oder er wird 1000 seyn u. s. f. gleichwie wir das Verhältniſs der Zehner bey den natürlichen Zahlen in umgekehrter Ordnung bestimmet haben. Z. B. 375 sind 3 Zehntheile, 7 Hunderttheile, 5 Tausendtheile

u. s. f. von dem nähmlichen Werthe, wie $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{5}{1000}$. Damit man aber erkennen könne, daſs die dargestellten Ziffern Decimal - Brüche seyn, so werden sie durch einen Beystrich von den ganzen Zahlen abgesondert, wenn anders ganze Zahlen vorhanden sind; sind aber keine vorhanden, so kann man an ihre Stelle eine Nulle, und zwischen dieser Nulle und der ersten Decimal - Ziffer einen Beystrich setzen, z. B. 2, 37, das sind, zwey Ganze, drey Zehntheile, sieben Hunderttheile. Ferner: 0, 375, das sind 3 Zehntheile, 7 Hunderttheile, 5 Tausendtheile. Daſs man aber dergleichen Brüche auf solche Art schreiben könne, erhellet aus der gewöhnlichen Addition der Brüche. Z. B. Man soll $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, und $\frac{5}{1000}$ in eine Summe sammeln; wenn sie nun alle zu dem gemeinschaftlichen Nenner 1000 reduciret werden, so hat man $\frac{300}{1000}$, $\frac{70}{1000}$, $\frac{5}{1000}$, das ist, nach Addirung der Zähler, $\frac{375}{1000}$; also werden oben immer so viel Plätze seyn, als unten Nullen sind; wenn also der Nenner weggelaſsen wird, so bleibt 375. Und umgekehrt, alle Decimal - Brüche können in abgesonderte Brüche mit ihren Nennern aufgelöset werden, wenn man unter den ersten 10, unter den zweyten 100, unter den dritten 1000 u. s. w schreibet.

II. FOLGERUNG.

169. Schon aus diesem Begriffe, und dem Verhältniſse, welches die zehntheiligen Brüche zu den ganzen Zahlen haben, ist es einleuchtend, wie jeder Bruch unabhängig von dem andern geschrieben werde. Denn gleichwie bey ganzen Zahlen jene Stellen, die keine Ziffer haben, mit Nullen ausgefüllet werden, damit man die folgende Ziffer auf ihre um zehnfachen Werth erhöhete Stelle übertragen könne; eben so werden bey zehntheiligen Brüchen die vorher gehenden leeren Stellen mit Nullen ausgefüllet, bis man zu derjenigen Stelle kommt, welche der Anzahl der Nullen in dem Nenner gleich ist, z. B. 3 Tausendtheile, oder $\frac{3}{1000}$; man schreibt also 0,003, das heiſst, kein Ganzes, kein Zehn-

theil, kein Hunderttheil, sondern drey Tausendtheile. Zwey Ganze, 3 Zehntheile, und 4 Zehntausendtheile schreibet man so: 2,3004.

III. FOLGERUNG.

110. Da diese Brüche, nach ihren Nennern betrachtet, von der Linken zur Rechten wachsen, so geben die am Ende angehängten Nullen weder einen gröſseren, noch kleineren Werth. Z. B. 0, 3 das ist, kein Ganzes, und drey Zehntheile, welches eben so viel ist, als 0, 3000000; denn hier ist kein Ganzes, sondern nur 3 Zehntheile, kein Hunderttheil, kein Tausendtheil, kein Zehntausendtheil u. s. f. Denn es ist so wohl der Zähler als der Nenner mit 10 multipliciret, welches den Werth nicht erhöhet; durch die Beysetzung der Nullen wird eben nichts addiret; daher kann man am Ende so viel Nullen, als man will, ohne Veränderung des Werthes, anhängen, welches bisweilen sehr dienlich ist, zwey, drey Brüche auf diese Art zu einer gleichen Anzahl von Ziffern reduciren zu können, wodurch besonders die Subtraction erleichtert, und auch die Division mit mehr Genauigkeit gemacht wird.

IV. FOLGERUNG.

111. Hieraus folget nun, daſs diese Ziffern hier bloſs einen Werth als Zehner haben können; denn zehn Zehntheile, das ist, $\frac{10}{10}$ sind einem Ganzen gleich; $\frac{10}{100}$ gelten ein Zehntheil; denn wenn man oben und unten eine Nulle wegnimmt, bleibet $\frac{1}{10}$; ferner $\frac{10}{1000}$ gelten ein Hunderttheil; wenn nähmlich oben und unten eine Nulle weggenommen wird, bleibet $\frac{1}{100}$; so auch $\frac{10}{10000}$ gelten ein Tausendtheil, oder $\frac{1}{1000}$. Der Werth also wächst ins Zehnfache, wie bey ganzen Zahlen, und so oft irgend eine Ziffer bis auf 10 hinauf steiget, so oft muſs eine Einheit auf die vorhergehende Stelle von der Rechten zur Linken, wie bey ganzen Zahlen, übertragen werden. Hieraus ist also klar, daſs die Addition und Subtraction der zehntheiligen Brüche auf

solche Art gemacht, und nach den nähmlichen Regeln, wie bey ganzen Zahlen, vorgenommen werden könne.

V. FOLGERUNG.

112. Hierdurch kann man leicht abnehmen, welcher Bruch gröſser als der andere sey; wenn beyde eine gleiche Anzahl von Ziffern haben, so ist derjenige gröſser, deſsen Ziffern, nach ihrem gewöhnlichen Werthe genommen, eine gröſsere Summe anzeigen; z. B. 4,72 ist gröſser als 4,69, weil 72 oder zwey und siebenzig mehr ist, als 69 oder neun und sechzig; ferner 4,7211 ist gröſser als 4,6999, weil sieben tausend mehr ist, als sechs tausend. Ist aber die Anzahl der Ziffern nicht gleich, so kann man sie gleich machen, wenn am Ende Nullen (welche nach §. 110. den Werth nicht ändern) angehängt werden; und dann ist derjenige Bruch gröſser, welcher eine gröſsere Summe ausmacht. Z. B. Es sind die Brüche 4,7 und 4,69999; man setzet also vier Nullen zu 7, und so wird 70000; nun sind aber siebenzig tausend mehr, als neun und sechzig tausend u. s. w. Denn wenn man gleiche Nenner darunter schreibt, so ist derjenige Bruch gröſser, der einen gröſseren Zähler hat. (§. 85.).

VI. FOLGERUNG.

113. Es ist auch einleuchtend, daſs, je mehr Decimal-Ziffern hinzugesetzt werden, desto mehr der Bruch sich dem Ganzen nähere, aber niemahl dem Ganzen gleich werde. Z. B. 4,999 nähert sich mehr dem Ganzen, als 4,99, weil dem letzteren ein Hunderttheil mangelt, um 5 Ganze zu machen; dem ersteren hingegen nur ein Tausendtheil abgehet. Je mehr Nenner also hinzu gesetzet werden, desto weniger entfernen sie sich von dem Ganzen, aber niemahl wird man ein Ganzes erhalten, weil immer nur kleinere Theile des Nenners hinzu kommen; und wenn man nicht zur letzten Ziffer einen Theil des nähmlichen Nenners hinzu setzt, so ist es unmöglich, ein Ganzes zu erhalten. Wenn

also zu dem Bruche 4, 999 ein Tausendtheil addiret wird, welcher die Benennung des letzten Neuners ist, so hat man 5 Ganze.

VII. FOLGERUNG.

114. Da also der Bruch durch Beysetzung einer Decimal - Ziffer sich immer mehr dem Ganzen nähert, und auch hierdurch ein genauerer Quotient erhalten wird, so kann jede Division, in welcher nebst dem gefundenen Quotienten ein Rest bleibet, fortgesetzet werden, so lange als man will. Man setzt nähmlich zu dem Reste eine Nulle, dividiret diesen neuen Dividendus mit dem vorigen Divisor, und der aus dieser Division entstandene Quotient wird Zehntheile enthalten; setzet man zu dem Reste wieder eine Nulle, so wird der aus der Division entstandene Quotient Hunderttheile ausmachen u. s. w.; z. B. es sey 26 mit 8 zu dividiren; hier ist der Quotient 3 mit dem Reste 2; setzet man nun eine Nulle hinzu, und dividiret dann 20 mit 8, so wird der Quotient 2 Zehntheile und der Rest 4 seyn. Zu diesem setzet man wieder eine Nulle, so hat man 40; wird nun dieses wieder mit 8 dividiret, so enthält der Quotient 5 Hunderttheile ohne Rest. Also ist 2, 25 der wahre Quotient, welcher aus dieser Division entstanden ist. Auf diese Art kann auch jeder gemeine Bruch in einen zehntheiligen Bruch verändert werden. Man setzt nähmlich zu dem Zähler oder Dividendus eine Nulle, und dividiret diese Gröſse mit dem Nenner; die Quotienten sind dann zehntheilige Brüche. So reduciret man $\frac{1}{2}$ zu 0, 5. Ferner $\frac{1}{4}$ zu 0, 25; ferner $\frac{3}{4}$ zu 0, 75; ferner $\frac{7}{8}$ zu 0, 875; ferner $\frac{5}{9}$ zu 0, 5555 u. s. f. Dieser letzte Bruch wird niemahl einen genauen Quotienten geben, indem aus der Division immer ein Rest bleibet. Dergleichen Brüche nennet man *annähernde* (approximantes); diejenigen aber, welche einen genauen Quotienten geben, heiſsen *genaue* (exactae) Brüche.

I. AUFGABE.

115. Zehntheilige Brüche addiren und subtrahiren.

AUFLÖSUNG.

I. Die gleichnahmigen Gröſsen werden unter einander von der Linken zur Rechten geschrieben, das ist, Zehntheile unter Zehntheile, Hunderttheile unter Hunderttheile u. s. f. Sind in einer Reihe mehr Decimal - Zahlen als in der andern, so kann man eine gleiche Anzahl von Ziffern erhalten, wenn man am Ende Nullen anhänget.

II. Man sammelt sie, wie ganze Zahlen, in eine Summe, oder subtrahiret die kleinere Zahl von der gröſseren; z. B. es sind zu addiren 3,0506, und 4, 789, und 6, 62, und 4, 753647.

3, 050600
4, 789000
6, 620000
4, 753647
19, 213247

Da der letzte Bruch aus sechs Ziffern besteht, so kann man auch bey allen übrigen, sechs Ziffer machen; man setzet daher zu dem ersten Bruche am Ende zwey Nullen, zu dem zweyten drey, zu dem dritten vier Nullen; und so hat man von den Tausendmahltausendtheilen nur 7, von den Hunderttausendtheilen nur 4, von den Zehntausendtheilen 12; man schreibet aber nur 2, und addiret die Einheit zur folgenden Reihe, so hat man 13 Tausendtheile; von diesen wird wieder nur 3 geschrieben und die Einheit übertragen; also sind 21 Hunderttheile; von diesen wird 1 geschrieben und 2 zu den Zehntheilen übertragen, derer Summe 22 ist; hiervon wird 2 geschrieben und 2 zu den Ganzen übertragen, welche zusammen 19 ausmachen.

BEWEIS.

Bey Brüchen, welche den nähmlichen Nenner haben, werden die Zähler addiret oder subtrahiret (§. 99. 102.); nun aber werden, nach der ersten Regel, die Brüche zu einem gemeinschaftlichen Nenner reduciret, denn es sind unten so viel Nullen, als oben Ziffern; also werden bey zehntheiligen Brüchen bloſs die Zähler, welche die gegebenen Brüche selbst sind, addiret, oder subtrahiret; und da sie, wie die ganzen Zahlen, wachsen, so zwar, daſs 10 Theile immer eine Einheit der nächst vorhergehenden Claſse ausmachen, so geschieht die Addition, wie bey ganzen Zahlen.

Z. B. Man soll subtrahiren 3,79468 von 7,3.

Man schreibt also

$$\begin{array}{r} 7,\ 30000 \\ \underline{3,\ 79468} \\ 3,\ 50532 \end{array}$$

Oben werden am Ende vier Nullen angehängt, um den nähmlichen Nenner, wie unten, zu erhalten; dann wird subtrahiret, wie bey ganzen Zahlen; 8 von 10 bleibet 2; 6 von 9 bleibet 3 u. s. f.

II. AUFGABE.

116. Zehntheilige Brüche multipliciren.

AUFLÖSUNG.

I. Man schreibet diese Brüche, wie ganze Zahlen, unter einander, ohne sie, als zehntheilige Brüche, durch einen Beystrich zu unterscheiden; und dann multipliciret man den Multiplicator mit dem Multiplicandus.

II. Darauf werden in dem Producte von der Rechten zur Linken so viel Ziffern für die zehntheiligen Brüche abgeschnitten, als in beyden Factoren Decimal-Ziffern sind.

Z. B. man soll 4,26 mit 3,62 multipliciren. Man schreibt also:

$$\begin{array}{r} 426 \\ 362 \\ \hline 852 \\ 2556 \\ 1278 \\ \hline 154212 \end{array}$$

Da oben und unten zusammen 4 Decimal-Ziffern sind, so muſs man in dem Producte 4 Ziffern abschneiden; also ist das Product 15, 4212.

BEWEIS.

Bey der Multiplication der Brüche werden die Zähler mit einander, und auch die Nenner mit einander multipliciret (§. 104.); nun aber sind die gegebenen zehntheiligen Brüche mit ganzen Zahlen oder ohne diese, zugleich Zähler; also müſsen sie, nach den gemeinen Regeln, mit einander multipliciret werden; das Product der Nenner aber wird dann so viel Nullen haben, als in beyden Factoren Nenner zusammen sind; also wird das Product der Zähler einen solchen Nenner haben, welcher so viel Nullen enthält, als in beyden Factoren Decimal-Ziffern sind; daher müſsen auch in dem Producte so viel Ziffern für die zehntheiligen Brüche abgeschnitten werden. Das vorhergehende Beyspiel würde demnach mit seinen Nennern so ausgedrückt werden: $\frac{426}{100}$ multipliciret mit $\frac{362}{100}$ macht $\frac{154212}{10000}$, oder 15,4212. So auch 3,503 multipliciret mit 1,2 gibt das Product 4,2036.

I. ANMERKUNG

117. Wenn in dem Producte genau eben so viel Ziffern vorkommen, als in beyden Factoren zusammen Decimal-Ziffern sind, so werden alle Ziffern des Productes De-

cimal-Ziffern seyn. Z. B. 4, 134 multipliciret mit 0, 2 gibt das Product 8268; und da in beyden Producten 4 Decimal-Ziffern sind, so werden alle diese vier, Decimal-Ziffern seyn, und müſsen demnach so geschrieben werden 0, 8268. Der Beweis ist der nähmliche, wie im vorhergehenden; denn sie werden mit ihren Nennern auf diese Art ausgedrücket $\frac{4134}{1000}$ und $\frac{2}{10}$, welche, mit einander multipliciret, $\frac{8268}{10000}$ geben; da nun der Nenner gröſser ist, als der Zähler, so ist es ein wahrer und eigentlicher Bruch, welcher kein Ganzes zuläſst.

II. ANMERKUNG.

118. Sind in dem Producte weniger Ziffern, als in den beyden Factoren zusammen, so müſsen zur Linken so viel Nullen hinzu gesetzt werden, um die Anzahl der Decimal-Ziffern zu ergänzen; nebstbey ist auch noch an die Stelle der Ganzen eine Nulle zu setzen. Sind in dem Producte drey Ziffern, in beyden Factoren aber zusammen sechs, so muſs man vor dem Producte drey Nullen setzen, und noch eine Nulle an die Stelle des Ganzen. Z. B. 0, 02 multipliciret mit 0, 0083, das ist, 83 multipliciret mit 2, gibt 166, welches so ausgedrückt wird 0, 000166; denn $\frac{2}{100}$ ist mit $\frac{83}{10000}$ multipliciret, und das Product ist $\frac{166}{1000000}$ oder 0, 000166.

III. AUFGABE.

119. Zehntheilige Brüche dividiren.

AUFLÖSUNG.

I. Man schreibet sie, wie die ganzen Zahlen, ohne die Decimal-Ziffern durch einen Beystrich zu unterscheiden; und dividiret dann eben so, wie bey ganzen Zahlen.

II. In dem Quotienten werden so viel Ziffern für die zehntheiligen Brüche abgeschnitten, als der Dividendus mehr, dann der Divisor enthält.

Z. B. es ist 3, 7036 mit 4, 7 zu dividiren. Man schreibt also, wie bey ganzen Zahlen:

$$\begin{array}{r|l} 37036 & 788 \\ 47 & \\ \underline{329} & \\ 413 & \\ 47 & \\ \underline{376} & \\ 376 & \\ 47 & \\ \underline{376} & \\ \emptyset & \end{array}$$

Wird nun die Division, nach den gemeinen Regeln, vorgenommen, so ist der Quotient 788, und da der Dividendus um drey Ziffer mehr hat, als der Divisor, so müſsen die drey Ziffer in dem Quotienten für die Decimal - Zahlen genommen werden; der Quotient also wird seyn 0, 788.

BEWEIS.

Bey der Division der Brüche wird der Zähler des Divisors zum Nenner gemacht, und dann werden die Brüche multipliciret (§. 105.); also werden bey zehntheiligen Brüchen die Nullen des Nenners vom Dividendus, zum Divisor, und die Nullen des Nenners vom Divisor, zum Dividendus gesetzt. Z. B. Wenn $\frac{37036}{10000}$ mit $\frac{47}{10}$ dividiret, und mit umgekehrtem Divisor $\frac{37036}{10000}$ mit $\frac{10}{47}$ multipliciret wird, so ist das Product $\frac{370360}{470000}$. Werden nun von beyden Seiten gleichviele Nullen weggenommen, so bleiben in dem Nenner so viel Nullen, als im Dividendus zehntheilige Ziffern mehr, dann im Divisor sind; nun aber zeiget die Menge der Nullen in dem Nenner an, was für Decimal-Ziffern und wie viel deren in dem Quotienten seyn: also müſsen im Quotienten so viel Decimal-Ziffern abgeschnitten werden, als deren im Dividendus mehr, dann im Divisor sind. Kurz, der Quotient, mit dem Divisor multipliciret, stellet den Dividendus her; er würde aber den Dividendus nicht herstellen, wenn nicht im Quotienten so viel Decimal - Ziffern gesetzt würden, als der Dividendus mehr Decimal - Ziffern, dann der Divisor hat; also sind im Quotienten so viel Decimal - Ziffern zu setzen, als der Dividendus deren mehr, dann der Divisor hat.

I. ANMERKUNG.

120. Ist die Anzahl der Decimal - Ziffern gleich, so sind in dem Quotienten keine Decimal - Ziffern; sind im Dividendus weniger Ziffern als im Divisor, so werden im Dividendus so viel Nulleu hinzu gesetzt, bis die Anzahl von Ziffern gleich wird; und dann wird der erste Quotient ein Ganzes seyn; wenn mehrere Nullen hinzu gesetzt werden, so wächst, nach der Anzahl der hinzu gesetzten Nullen, die Anzahl der Decimal - Ziffern im Quotienten. Beydes erhellet aus dem vorhergehenden Beweise.

Z. B. es ist 181, 23 mit 25, 89 zu dividiren.

Also wird seyn; $\begin{array}{r|l} 18123 & 7 \text{ Ganze u. s. w.} \\ 2589 & \end{array}$

Ferner ist 43, 5 mit 5, 26 zu dividiren.

Also wird seyn: $\begin{array}{r|l} 4350 & 8 \text{ Ganze u. s. w.} \\ 526 & \end{array}$

Wenn man hier wieder Nullen hinzu setzt, so fangen die zehntheiligen Brüche an, und werden so lange fort gesetzet, als man, zur Fortführung der Division, nach einander Nullen beysetzen will.

II. ANMERKUNG.

121. Ist der Dividendus kleiner als der Divisor, so kann die Division in ganzen Zahlen nicht vor sich gehen: denn es ist in diesem Falle ein ächter oder eigentlicher Bruch, z. B. wenn man 0, 045 mit 9 Ganzen dividiren sollte. Werden nun diese Brüche mit ihren Nennern ausge-

drückt, so hat man $\frac{45}{1000}$ mit $\frac{9}{1}$ zu dividiren; und nach geschehener Division ist der Quotient $\frac{45}{9000}$, welches ein ächter Bruch ist; folglich kann der Zähler mit dem Nenner nicht dividiret werden. Wäre aber dieser Bruch (nach der VII. Folgerung) zu einem zehntheiligen Bruche zu reduciren, so müſste man dem Zähler nach einander Nullen beysetzen; und da man die Division erst, nachdem drey Nullen hinzu gesetzt sind, anfangen kann, so ist es ein Zeichen, daſs der Quotient auch am Anfange drey Nullen, und erst auf der vierten Stelle eine Zahl haben werde, welche eben darum ein Tausendtheil ist. Die Division würde so vor sich gehen:

$$\begin{array}{r|l}
45 & 0,005 \\
9000 & \\
\hline
450 & \\
9000 & \\
\hline
4500 & \\
9000 & \\
\hline
45000 & \\
9000 & \\
45000 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

III. ANMERKUNG.

122. Es geschieht bisweilen, daſs von den gefundenen Decimal-Ziffern nur die ersten drey oder vier gebraucht, alle übrigen aber weggeworfen werden, je nachdem nähmlich dieses zu einer genaueren Berechnung erforderlich ist: und die vorgelegte Materie muſs es bestimmen, ob es hinreichend sey, Tausendtheile zu haben, oder ob Zehntausendtheile, oder noch kleinere erfordert werden. In diesem Falle aber ist zu merken: wenn die erste von den weggeworfenen Ziffern gröſser ist, als fünf, so ist die letzte aus den übrig bleibenden, um eine Einheit zu vermehren, damit die weggeworfenen Ziffern ersetzt werden. Z. B. in dem

zehntheiligen Bruche 4, 56487, wenn die Beybehaltung der Tausendtheile hinreichend ist, wird 87 weggeworfen, dagegen muſs die letzte übrig bleibende Ziffer 4 um eine Einheit vermehret werden; folglich hat man den Bruch 4, 565; und so von den übrigen. Wenn von den weggeworfenen Ziffern die erste kleiner als fünf, oder fünf gleich ist, so werden sie ohne Ersatz weggeworfen.

ANFANGSGRÜNDE
DER
A L G E B R A.

I. HAUPTSTÜCK.
ALLGEMEINE BEGRIFFE
VON DER
ALGEBRA ODER BUCHSTABENRECHNUNG.

I. ERKLÄRUNG.

1. Algebra (aus dem Arabischen أَلْجَبْرٌ *Algébron*, oder *Algéber*) ist die allgemeine Rechenkunst, oder die Wiſsenschaft der abgezogenen (abstracten) und unbestimmt oder überhaupt genommenen Gröſsen, welche mit Buchstaben, derer Bedeutung gleichfalls unbestimmt ist, ausgedrückt wird. Daher heiſst Algebra auch insgemein die *Buchstabenrechnung*.

ANMERKUNG.

2. Man hat daher in der Algebra auf drey Stücke zu sehen: 1) auf die *Gröſsen* selbst, 2) auf die *Verände-*

rungen, die mit diesen Gröſsen vorgenommen werden, und 3) auf die *Verhältniſse*, welche sie gegen einander haben. Für jedes dieser drey Stücke werden eigene Zeichen oder Buchstaben gebraucht.

I. HYPOTHESE.

3. Jede Gröſse wird mit Buchstaben des Alphabetes ausgedrückt a, b, c, z u. s. w.; diese sind also die Zeichen der Gröſsen; die schon bekannten Gröſsen werden gewöhnlich mit den ersten Buchstaben a, b, c und so fort, die noch unbekannten aber mit den letzten Buchstaben x, y, z bezeichnet. Hieraus folget

II. ERKLÄRUNG.

4. Ein algebraischer Ausdruck ist eine, oder mehrere, mit einem oder mehreren Buchstaben bezeichnete Gröſsen. Jene wird eine *einfache*, z. B. a, b, c; diese eine *zusammengesetzte* genannt, indem sie mehrere, zugleich genommene, Gröſsen darstellet, als ab, $bcdd$. Wenn beyde für sich allein gesetzt, so heiſsen sie *unzusammenhängende* Gröſsen, als a, abc, de, xx, welche man auch *Glieder* zu nennen pflegt. Wird aber eine mit mehreren durch die Zeichen (§. 6.), welche bey den Veränderungen vorzunehmen sind, verbunden, so entstehet eine *zusammenhängende* Gröſse, als: $ab+ed$ oder $a-b$. Jede Gröſse, die nur aus einem Gliede bestehet, heiſst *eingliederig*; die mit zwey Gliedern verbunden ist, *zweygliederig*; die mit drey Gliedern zusammen hängt, *dreygliederig* u. s. f.; überhaupt, wenn sie aus mehreren Gliedern bestehet, *vielgliederig*. Z. B. abc, oder a oder cd sind eingliederige Gröſsen; $ab+cd$ ist eine zweygliederige; $a-cd+f$ ist eine dreygliederige u. s. f. *Gleichnahmige* oder

ähnliche Gröſsen sind, wenn beyde mit den nähmlichen Buchstaben, und mit der nähmlichen Anzahl der Buchstaben ohne ein dazwischen stehendes Zeichen ausgedrückt werden. Z. B. *ab* und *ab*; *ccd* und *ccd*. *Ungleichnahmige* oder unähnliche sind, wo entweder die Buchstaben verschieden sind, oder die Anzahl derselben verschieden ist, z. B. *ab* und *cd*; ferner *aab* und *ab*; oder *aaa* und *aa*.

ANMERKUNG.

5. Der unbestimmte Werth der Buchstaben wird hier um so weniger befremden, wenn man sich an die Zahlengröſsen erinnert, welche gleichfalls keine bestimmte Bedeutung haben. Z. B. die Zahl 20 kann entweder Menschen, oder Pferde, oder Häuser, oder Gulden, oder andere Gegenstände bedeuten, und dieſs hängt bloſs von unserer Willkühr ab; eben so dient das noch allgemeinere *a* oder *b*, entweder um 10 Menschen, oder 100 Pferde, oder 30 Bäume u. s. f. anzuzeigen, und das eine oder andere wird auch hier bloſs durch unsern Willen bestimmt.

II. HYPOTHESE.

6. Bey den Veränderungen, die mit diesen Buchstabengröſsen vorgenommen werden, pflegt man folgende Zeichen zu brauchen. Die Addition wird durch das Zeichen $+$, welches *mehr* heiſst, angezeiget; z. B. a ist zu b zu addiren, so schreibet man $a+b$ das ist, *a mehr b*; $cd+ef$ ist *cd mehr ef*. Die Subtraction hat das Zeichen $-$, welches *weniger* heiſst. Soll man z. B. b von a subtrahiren, so schreibet man $a-b$, das ist, *a weniger b*. Die Multiplication wird durch das Zeichen $\times$ angezeiget, oder auch durch einen Punkt. Z. B. $a \times b$, oder $c.d$ das bedeutet, a multipliciret mit b; oder c multipliciret mit d. Ist ei-

ne zusammen hängende Gröſse zu multipliciren, so wird sie in Klammern eingeschloſsen, als $(a-b)\,c$; und dann wird das andere Zeichen der Multiplication weggelaſsen, welches man auch so schreiben kann $\overline{a-b}\times c$. Die Division endlich hat zweyerley Zeichen, entweder zwey Punkte, oder sie wird mit einer Linie zwischen den Buchstaben, wie ein Bruch, angezeiget. Z. B. $a:b$ oder $\frac{a}{b}$, das ist, a mit b dividiret. Ferner $(a-b):(e-f)$ das ist, *a weniger b*, dividiret mit *e weniger f*; oder $\overline{a-b}:\overline{e-f}$, oder $\frac{a-b}{e-f}$.

FOLGERUNG.

7. Hieraus folget, daſs diese Zeichen nur die vorgenommenen Veränderungen der Gröſsen andeuten, keineswegs aber die Gröſsen selbst angehen. Z. B. $+\,a$ bedeutet, daſs die Gröſse a zu addiren sey; und $-\,a$ bedeutet, daſs die nähmliche Gröſse a zu subtrahiren sey; folglich wird durch die Zeichen nicht die Gröſse selbst verändert, sondern nur die verschiedene Behandlungsart der Gröſse angedeutet, was nähmlich mit jener Gröſse vorzunehmen oder wie sie zu betrachten sey.

III. HYPOTHESE.

8. Endlich das Verhältniſs einer Gröſse zur andern wird durch zwey Punkte (:) ausgedrückt. Um anzuzeigen, welche von beyden Gröſsen gröſser, welche kleiner sey, bedient man sich des Zeichens $>$ oder umgekehrt $<$, doch so, daſs die Spitze immer gegen die kleinere Gröſse, und die zwey Ende gegen die gröſsere gerichtet werden. Z. B. $a>b$ bedeutet, a gröſser als b; $a<b$ heiſst, a kleiner als b. Die zwey Linien $=$ be-

deuten die Gleichheit, das Zeichen $\backsim$ aber die Ähnlichkeit. Z. B. $ab = cd$ heiſst, *ab gleich cd;* und $x \backsim y$ heiſst, *x ähnlich y.*

I. ANMERKUNG.

9. Indeſs ist es doch üblich geworden, die Gröſsen selbst bisweilen auch nach ihren beygesetzten Zeichen zu betrachten. So heiſst diejenige, welche das Zeichen $+$ hat, eine *positive* oder *bejahende, bejahete* Gröſse, das ist, eine wirklich vorhandene und bestehende; die aber das Zeichen $-$ hat, heiſst eine *negative* oder *verneinende, verneinte,* das ist, eine abwesende, eine abzuziehende. Z. B. Wenn Peter 10 Gulden hat, so schreibet man das Zeichen $+$, welches anzeiget, daſs er diese 10 Gulden wirklich besitzet; also $+10$. Wenn er nun dem Paul 10 Gulden schuldig ist, so hat er im Grunde nichts eigenes, weil er so viel schuldig ist, als er hat; also 10, subtrahiret von 10, das ist $10-10$ bleibet 0. Wäre er 20 Gulden schuldig, so hätte er nicht nur allein nichts, sondern er hätte noch weniger, als nichts; welches nun durch das Zeichen $-$ ausgedrückt wird. Also wäre der Vermögensstand des Peter -10; welches anzeiget, daſs Peter dem andern 10 Gulden schuldig ist. Wenn also 20 von 10 abgezogen werden, so bleiben, nach abgezogenen 10, noch andere 10 zu subtrahiren, das ist, $10-20$, welches -10 macht, nämlich die Schuld von 10 Gulden. Hat man einmahl diesen Begriff wohl gefaſst, so werden die vorfallenden Veränderungen keine Schwierigkeit machen.

II. ANMERKUNG.

10. Jede Gröſse muſs vor sich ein Zeichen haben, damit man wiſse, ob sie zu addiren, oder zu subtrahiren sey. Es ist aber nicht nöthig, das Zeichen $+$ immer auszudrücken, sondern wenn die Gröſse eingliederig ist, oder in einer zusammenhängenden Gröſse zuerst stehet, so kann man das erste Zeichen $+$ auslaſsen, weil es schon darun-

ter verstanden wird. Das Zeichen der Subtraction aber muſs immer ausgedrückt werden.

III. ANMERKUNG.

11. Da es sich bisweilen ereignet, daſs die Gröſsen selbst einige Mahle genommen werden müſsen, so wird dieses durch Zahlen, welche man denselben umittelbar vorsetzet, ausgedrückt; z. B. wenn die Gröſse a drey Mahl zu nehmen ist, so schreibet man $3a$. Diese Zahlen, welche auf solche Art den Buchstaben ohne ein dazwischen stehendes Zeichen vorgesetzt werden, heiſsen die *Coefficienten.*

III. ERKLÄRUNG.

12. Ein *Coefficient* ist die den Buchstaben unmittelbar vorgesetzte Zahl, welche andeutet, wie oft jene durch Buchstaben ausgedrückte Zahl zu nehmen, oder womit sie multipliciret sey. Ist kein Coefficient ausgedrückt, so wird eine Einheit verstanden, aber niemahl geschrieben. Z. B. ac ist $1ac$; $2dd$ sind $2dd$, oder dd ist mit 2 multipliciret.

ANMERKUNG.

13. Die Verschiedenheit der Coefficienten von zwey Gliedern verändert in der Ähnlichkeit nichts, z. B. $6aa$ und $3aa$ sind gleichnahmige Glieder; aber $6a$ und $6b$; ferner $5aaa$ und $5aa$ sind ungleichnahmige Glieder.

II. HAUPTSTÜCK.

VON DEN ALLGEBRAISCHEN RECHNUNGSARTEN.

I. AUFGABE.

14. Algebraische Glieder auf die gehörige und einfacheste Art ausdrücken.

AUFLÖSUNG.

I. Die Glieder und die einzelnen Buchstaben in dem nähmlichen Gliede, es sey nun eine zusammenhängende oder unzusammenhängende Gröſse, folgen in alphabetischer Ordnung auf einander; dann ist zu sehen, wenn es sich thun läſst, daſs das erste Glied immer bejahend sey. Z. B. $b-c+a+fd$ wird in dieser Ordnung geschrieben $a+b-c+df$. Ferner $8fb-10bac+6a$ ist so zu schreiben $6a-10abc+3bf$.

II. Die ähnlichen oder gleichnahmigen Glieder werden nach ihren Zeichen und nach ihren Coefficienten zu einem einzigen Gliede reduciret. Dieses geschieht,

entweder durch *Addirung der Coefficienten*, wenn sie das nähmliche Zeichen haben; und dann wird der Summe wieder das nähmliche Zeichen vorgesetzt;

oder durch *Subtrahirung* des kleineren Coefficienten von dem gröſseren, worauf das Zeichen des gröſseren dem Unterschiede vorgesetzt wird, wenn sie verschiedene Zeichen haben;

oder durch *gegenseitige Aufhebung* zweyer Glieder, wenn die Zeichen verschieden, die Coefficienten aber in beyden gleich sind.

I. Beysp. $ab+ab+cd$ wird $2ab+cd$.
$2a-2d+5a-6d$ wird $7a-8d$.
$aa+2ac+3ac$ wird $aa+5ac$.

II. $3ab+2abb-ab$ wird $2ab+2abb$.
$2a+d-7a$ wird $d-5a$.

III. $aa+2abb+3aa-2abb$ wird $4aa$.
$bd-bdf+2bd+2bdf-3bd$ wird bdf.

BEWEIS.

Die Buchstaben zeigen an, *was für eine* Gröſse zu nehmen sey; die Coefficienten bedeuten, *wie oft* die Gröſse zu nehmen sey; und die Zeichen, *auf welche Art* sie zu nehmen sey. Wenn demnach eben dieselbe Gröſse einige Mahle zu addiren oder zu subtrahiren ist, so ist es genug, dieselbe nur ein Mahl mit demjenigen Coefficienten zu setzen, welcher dieses ausdrücket. Dieſs geschieht im I. Falle. Soll hingegen die nähmliche Gröſse einige Mahle addiret, aber auch zugleich einige Mahle subtrahiret werden, so wird der Rest der zu addirenden oder zu subtrahirenden Gröſse auf diese Art ausgedrückt, wie im II. Falle. Wenn endlich das nähmliche addiret, und zugleich subtrahiret werden soll, so ist es klar, daſs nichts übrig bleibet, wie im III. Falle. Durch diese Darstellungen also werden die Glieder auf die einfacheste Art ausgedrückt.

II. AUFGABE.

15. Algebraische Gröſsen addiren.

AUFLÖSUNG.

Alle gegebenen Glieder werden sammt ihren eigenen Zeichen nach der Ordnung geschrieben, und hierauf nach der I. Aufgabe gehörig reduciret.

I. Beyspiel. Es sind ab und bc zu addiren; man schreibet also $ab+bc$.

II. Beyspiel. Sind $4a$ und $8a$ zu addiren, so schreibet man $4a+8a$; dieses reduciret, macht $12a$. Die Summe von $3a$ und $-5a$ und $2a$ ist $3a-5a+2b$, und reduciret, $2b-2a$.

III. Beyspiel. Sind $ab+c$ und $b-c$ zu addiren, so schreibet man $ab+b+c-c$; und reduciret, $ab+b$.

IV. Beyspiel. Die Summe von $3bc-4bcd+6bf$ und $+6bcd-5bc+3bf$ wird durch die Reduction $2bcd-2bc+9bf$.

BEWEIS.

Addiren heiſst, die Summen und einzelnen Gröſsen in eine Hauptsumme sammeln;

Da nun durch diese Regel die gegebenen Gröſsen in eine zusammenhängende Gröſse gesammelt werden, welche die Hauptsumme darstellet;

So ist die algebraische Addition richtig gemacht.

I. ANMERKUNG.

16. Daſs bey ähnlichen Gröſsen nur die Coefficienten addiret werden, dieſs kann man am deutlichsten einsehen, wenn man ihnen eine gewiſse Bedeutung beyleget. Soll a eine Linie, oder einen Gulden bedeuten, so ist es unläugbar, daſs $3a$ und $5a$, das ist, 3 Gulden und 5 Gulden, oder 3 Linien und 5 Linien, zusammen $8a$, das ist, 8 Gulden oder 8 Linien machen. So ist es auch bey ungleichnahmi-

gen Grösen klar, daſs sie bloſs geschrieben werden müſsen, z. B. die Summe von $3b$ und $2c$ ist $3b+2c$. Soll hier b einen Gulden und c einen Kreuzer bedeuten, so kann die Summe nicht anders ausgedrückt werden, als 3 Gulden, mehr 2 Kreuzer; oder $6b$ und $-4c$ ist $6b-4c$ oder 6 Gulden, weniger 4 Kreuzer.

II. ANMERKUNG.

17. Um die Reduction nach der Addition leichter machen zu können, schreibet man die zu addirenden gleichnahmigen Glieder in gerader Linie unter einander; auf diese Art werden die Coefficienten mit ihren Zeichen leichter nach den gegebenen Regeln in ein Hauptglied zusammen gezogen, wie aus den folgenden zwey Beyspielen zu ersehen ist.

I.

$$\begin{array}{rrrr} 15ab & -6cd & +4fg & \\ & -7cd & +3fg & -ghh \\ -6ab & & -fg & +3ghh \\ \hline 9ab & -13cd & +6fg & +2ghh \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{rrrrrrr} 2x & -3a & +4b & -5c & +6d & -7e & \\ 10x & +9a & -8b & -7c & -6d & & -5f \\ \hline 12x & +6a & -4b & -12c & & -7e & -5f \end{array}$$

III. ANMERKUNG.

18. Bey algebraischen Darstellungen verfährt man von der Linken zur Rechten, obschon es gleichviel ist, auch von der Rechten zur Linken anzufangen; weil die Buchstabengröſsen keinen Werth haben, der von der Stelle abhienge.

III. AUFGABE.

19. Algebraische Gröſsen subtrahiren.

AUFLÖSUNG.

In der Gröſse, die zu subtrahiren ist, wird jedes Zeichen in das entgegengesetzte verändert,

$+$ in $-$; und $-$ in $+$; hierauf wird addiret und reduciret.

I. Beyspiel. Man soll a von a subtrahiren; man schreibet also $a-a$, das ist, 0.

II. —— Von ab soll cd subtrahiret werden; also schreibet man $ab-cd$.

III. —— Von $3cdg$ ist $2cdg$ zu subtrahiren; also schreibet man $3cdg-2cdg$ das ist cdg.

IV. —— Von abc ist $-abc$ zu subtrahiren; also schreibet man $abc+abc$ das ist $2abc$.

V. —— Von $aa+2bc+bbd$ soll $aa+4bc-bbd$ subtrahiret werden; also heiſst es nach veränderten Zeichen $-aa-4bc+bbd$; nach erfolgter Addition wird man haben $aa-aa+2bc-4bc+bbd+bbd$ das ist $2bbd-2bc$.

BEWEIS.

Die Subtraction einer Gröſse wird durch das Zeichen $-$ ausgedrückt (§. 6.); wenn also die Gröſse b von der Gröſse a subtrahiret werden soll, so muſs der Gröſse b das Zeichen der Subtraction vorgesetzet, das ist, das Zeichen $+$ in $-$ verändert werden. Hat aber die Gröſse, welche zu subtrahiren ist, schon das Zeichen $-$, ist sie also schon eine zu subtrahirende Gröſse, und soll sie als solche subtrahiret werden, so muſs man, da nach der allgemeinen Regel zwey Verneinungen eine Bejahung ausmachen, das verneinende Zeichen in das bejahende verändern.

I. ANMERKUNG.

20. Dieſs läſst sich auch aus dem Begriffe der verneinten Gröſse (§. 9.) beweisen. Denn da diese ein Abgang ist, oder als eine Schuld betrachtet werden kann, welche von irgend einer andern Gröſse zu subtrahiren ist, so heiſst, einen Abgang oder eine Schuld subtrahiren, nichts anders, als machen, daſs der andere diesen Abgang, diese

Schuld nicht habe; welches aber nicht anders geschehen kann, als durch die Veränderung der verneinten Gröſse in die bejahete; gleichwie hingegen einen Abgang addiren heiſst, machen, daſs der andere diesen Abgang habe. Wenn man also zu a, die Gröſse *weniger* b addiren soll, so schreibet man $a-b$; soll aber von a die Gröſse *weniger* b subtrahire werden, so schreibet man $a+b$. Wird zu 12 der Abgang 4 addiret, so hat man 12—4, das ist, 8. Wird von 8 der Abgang 4 subtrahiret, so hat man 8+4, das ist, 12.

II. ANMERKUNG.

21. Da es widersprechend ist, daſs eine verneinte Grösse, als solche, wirklich bestehe, so muſs sie immer als eine wahre Gröſse, die subtrahiret werden soll, betrachtet werden; daher sie denn immer eine andere bejahende Gröſse voraus setzet, von welcher sie zu subtrahiren ist. Und hieraus nimmt man noch einen anderen Beweis von einer solchen zusammenhängenden Gröſse. Z. B. von a ist die Grösse $b-c$ zu subtrahiren; wenn nun b von a subtrahiret, das ist, $a-b$ geschrieben wird, so wird jeder merken, daſs zu viel subtrahiret worden ist, indem nicht die ganze Gröſse b, sondern diese nur um die Gröſse c vermindert, hätte subtrahiret werden sollen; um also den gehörigen Ersatz zu machen, muſs man wieder so viel addiren, als man zu viel subtrahiret hat. Nun aber war das Zuviele die Gröſse c, also muſs c wieder addiret werden, und dann hat man $a-b+c$, das ist, die Zeichen werden in die entgegengesetzten verändert. Wenn von 12 die Zahl 8—3 zu subtrahiren wäre, und man 8 von 12 subtrahirte, so würde man um drey Einheiten zu viel subtrahiren, indem nicht die ganze Gröſse 8, sondern diese nur um die Gröſse 3 vermindert, hätte subtrahiret werden sollen; wenn man also 12—8 schriebe, so erhielte man nicht den wahren Unterschied, sondern einen zu geringen, folglich müſste man zum gehörigen Ersatze wieder 3 Einheiten addiren, und so hätte man

$12-8+3$ das ist 7. Eben so, als subtrahirte man von 12 die Gröſse $8-3$, das ist, 5.

III. ANMERKUNG.

22. Je weniger von einer Zahl z. B. von 7 subtrahiret wird, desto mehr bleibet übrig. Wird nichts oder 0 sub trahiret, so bleibet die ganze Zahl übrig; wenn also weniger als nichts, oder eine verneinte Gröſse subtrahiret wird, so muſs mehr als 7 übrig bleiben. Z. B. 4 von 7 bleiben 3; 2 von 7 bleiben 5; 0 von 7 bleiben 7; also -2 von 7 bleiben 9.

IV. ANMERKUNG.

23. Die zu subtrahirenden Glieder können, wie bey der Addition, unter die gleichartigen der gröſseren Gröſse geschrieben werden, um die Reduction leichter machen zu können. Denn wenn die Zeichen in die entgegengesetzten verändert werden, so ist dieses Verfahren von der Addition nicht unterschieden, wie die folgenden Beyspiele zeigen.

BEYSPIELE.

I. $9ab-13cd+6fg+2ghh$ die gröſsere Gröſse.
$-6ab-7cd+3fg+3ghh$ die kleinere Gröſse.
$+ \quad + \quad - \quad -$ Veränderung d. Zeichen.

$15ab-6cd+3fg-ghh$ der Rest.

II. $12x+6a-4b-12c-7e-5f$ die gröſsere.
$10x+9a-8b-7c-6d-5f$ die kleinere.
$- \quad - \quad + \quad + \quad + \quad +$ Veränd. d. Zeich.

$2x-3a+4b-5c+6d-7e$ der Rest.

III. $20aab+6abbc-18ccd+5dgg$ die gröſsere.
$2aab-3abc+7ccd+5dgg$ die kleinere.
$- \quad + \quad - \quad -$ Veränd. d. Zeich.

$18aab+6abbc+3abc-25ccd$ der Rest.

V. ANMERKUNG.

24. Da in dem dritten Beyspiele *abbc* und *abc* ungleichnahmig sind, weil *b* oben zwey Mahl, unten aber nur ein Mahl gesetzt ist, so können diese zwey Grösen in ein Glied nicht vereiniget, sondern jede derselben mufs insbesondere geschrieben werden.

IV. AUFGABE.

25. Algebraische Gröfsen multipliciren.

AUFLÖSUNG.

Regel für die Zeichen. Gleiche Zeichen in beyden Factoren + und +, oder — und — geben in dem Producte immer das Zeichen +. Ungleiche Zeichen + und —, oder — und + geben in dem Producte immer das Zeichen —.

Regel für die Coefficienten. Die Coefficienten der Factoren werden mit einander multipliciret, und das daraus entstehende Zahlen - Product ist der Coefficient des algebraischen Productes.

Regel für die Buchstaben. Die Buchstaben werden ohne Zwischenzeichen zusammengesetzt.

$a \times b$ gibt das Product ab
$a \times -b$ gibt das Product $-ab$
$-a \times b$ gibt das Product $-ab$
$-a \times -b$ gibt das Product ab
$2a \times 6b$ gibt das Product $12ab$.

Bey zusammenhängenden Gröfsen mufs jedes Glied des Multiplicators mit allen Gliedern des Multiplicandus multipliciret werden, wie bey ganzen Zahlen. Z. B. $(3ac-4bd) \times 2ab$ gibt das Product $6aabc-8abbd$. $(2a+b-5c) \times (3a-d+6f)$ gibt das Product $6aa+3ab-15ac-2ad-bd+5cd+12af+6bf-30cf$. Es wird nähmlich der ganze Multiplicandus mit $3a$, dann mit $-d$, endlich mit $6f$ multipliciret. Finden sich einige gleichnahmige Glieder, so werden sie (nach der I. Aufgabe) zu einem einzigen Gliede reduciret; welches die Sache wieder dadurch erleichtert, wenn während der Ausarbeitung selbst die gleichnahmigen unter die gleichnahmigen geschrieben werden, wie in dem unten vorkommenden I. Beyspiele zu sehen ist.

BEWEIS.

Für die Zeichen. Multipliciren heiſst, die zu multiplicirende Gröſse so oft setzen, als Einheiten in dem Multiplicator enthalten sind. Wenn man also eine bejahete Gröſse, oder das Zeichen $+$ mit einer solchen Gröſse, oder mit dem Zeichen $+$ multipliciret, oder einige Mahle addiret, so wird die obere Gröſse so oft gesetzt, als in der unteren Einheiten sind; z. B. $+3 \times +2$ gibt 6, weil 3 zwey Mahl gesetzt werden muſs; daher muſs auch in dem Producte das Zeichen $+$ seyn.

Wenn mit der bejaheten Gröſse $+$ die zu subtrahirende $-$ multipliciret wird, so zeiget die Multiplication, wie oft die zu subtrahirende Gröſse gesetzt oder geschrieben werden soll; folglich bleibt die zu subtrahirende Gröſse, und wird durch das Zeichen $-$ ausgedrückt; denn die zu subtrahirende Gröſse ist so oft gesetzt, als in dem Multiplicator Einheiten sind; z. B. -3×2 bedeutet, daſs die Ermangelung der Gröſse 3 zwey Mahl zu setzen sey, welches -6 machet.

Wenn $+$ mit $-$ oder eine zu addirende Grösse mit einer zu subtrahirenden multipliciret wird, so muſs die bejahete Gröſse so oft subtrahiret oder in Ermangelung gebracht werden, als in dem Multiplicator Einheiten sind. Z. B. 3×-2 bedeutet, dafs die Gröfse 3 zwey Mahl zu subtrahiren sey, welches —6 gibt.

Ist — mit — zu multipliciren, so wird die zu subtrahirende Gröfse so oft subtrahiret oder in Ermangelung gebracht, als in dem Multiplicator Einheiten sind; nun aber, eine verneinte Gröfse in Ermangelung bringen, heifst, dieselbe setzen oder addiren, also mufs in dem Producte das bejahende Zeichen seyn. Denn die Ermangelung der verneinten Gröfse wird so oft genommen, oder was einerley ist, diese Gröfse wird so oft gesetzt, als in dem Multiplicator Einheiten sind.

Für die Coefficienten erhellet der Beweis aus der Multiplication in Zahlen; denn die Coefficienten sind die Factoren, welche, mit einander multipliciret, das gesuchte Product geben.

Für die Buchstaben. Multipliciren heifst, aus einer einfachen Gröfse eine zusammengesetzte machen; nun aber ist eine zusammengesetzte Gröfse diejenige, in welcher die Buchstaben ohne ein dazwischen gesetztes Zeichen vereiniget werden (§. 4); also werden durch diese Vereinigung der Buchstaben die Gröfsen multipliciret; a und b sind einfache Gröfsen oder Factoren; ab aber ist eine zusammengesetzte oder ein Product; ac und bd sind Factoren, $abcd$ ist ihr Product.

I. ANMERKUNG.

26. Der nähmliche Beweis, welchen wir bey der Subtraction gegeben haben (§. 23.), kann auch hier angewandt werden. Da eine verneinte Gröfse nichts wirkliches ist, so ist es unmöglich, mit ihr eine andere verneinte zu multipliciren; daher mufs sie, als verbunden mit einer anderen Gröfse, von welcher sie zu subtrahiren ist, be-

trachtet werden. Z. B. $a-c$ soll mit $b-d$ multipliciret werden. Der Anfang wird mit b gemacht; a mit b multipliciret, gibt ab; da aber nicht die ganze Grösse a, sondern diese, um die Grösse c vermindert, zu multipliciren ist, so ist das Product ab zu gross, und zwar so viel Mahl zu gross, als b, mit c multipliciret, in demselben enthalten ist; also muss bc subtrahiret werden; folglich $-c \times + b$ gibt $-bc$, oder ungleiche Zeichen geben das Zeichen $-$. Alsdann a mit $-d$ multipliciret, gemäss dem vorher gesagten, oder weil es so viel Mahl subtrahiret werden soll, als in d Einheiten sind, gibt $-ad$; da aber nicht die ganze Grösse, sondern diese, um die Grösse c vermindert, zu multipliciren und zu subtrahiren ist, so wird zu viel subtrahiret, und zwar so viel Mahl zu viel, als c, mit d multipliciret, in demselben enthalten ist; daher muss diese Grösse cd wieder addiret, oder mit dem Zeichen $+$ geschrieben werden, das ist, $-$ mit $-$ gibt $+$.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens wird man am deutlichsten einsehen, wenn man Zahlen an die Stelle der Buchstaben setzet. Z. B. $8-3$ soll mit $6-4$ multipliciret werden. 8 mit 6 multipliciret, gibt 48. Dieses Product ist aber zu gross, weil nicht die ganze Zahl 8, sondern 8, um drey Einheiten weniger zu multipliciren ist; daher muss das Product von 3 Mahl 6, das ist, die Zahl 18 subtrahiret werden. Also ist das erste wahre Product $48-18$. Alsdann 8 mit -4 multiplicirt, gibt 32, gemäss dem vorher gesagten; allein das zu subtrahirende oder verneinte Product ist abermahl zu gross, nähmlich so viel Mahl zu gross, als 3×4 in demselben enthalten ist; um also den gehörigen Ersatz zu machen, muss das Product von 3 Mahl 4 addiret werden, und so hat man das zweyte wahre Product $-32+12$. Beyde Producte zusammen sind $48-18-32+12$, das ist, $60-50=10$. Das nähmliche Product, welches entstehet, wenn man 5 oder $8-3$ mit 2 oder mit $6-4$ multipliciret.

II. ANMERKUNG.

27. Wenn die Factoren zusammenhängende Gröſsen sind, so setzet man den Multiplicator unter den Multiplicandus, ziehet dann eine Linie, wie bey der Multiplication in Zahlen, und schreibet die Producte in verschiedenen Reihen oder Linien; wobey wohl zu merken ist, daſs die gleichnahmigen Gröſsen unter den gleichnahmigen stehen müſsen; hierauf werden diese Producte, wenn es sich thun läſst, reduciret (§. 14.), und das ganze Product in einer Reihe dargestellet, wie in den folgenden Beyspielen zu sehen ist.

I. Beyspiel.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline aa+ab \\ -ab-bb \\ \hline aa-bb. \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{l} 3ab-6cd+5ffg \\ 4ab-3fg \\ \hline 12aabb-24abcd+20abffg \\ -9abfg+18cdfg-15fffgg \\ \hline 12aabb-24abcd+20abffg-9abfg+18cdfg-15fffgg. \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{l} 6xx-7ax+8aa \\ 2xx-3ax+4aa \\ \hline 12xxxx-14axxx+16aaxx \\ \quad -18axxx+21aaxx-24aaax \\ \quad\quad +24aaxx-28aaax+32aaaa \\ \hline 12xxxx-32axxx+61aaxx-52aaax+32aaaa. \end{array}$$

III. ANMERKUNG.

28. Es ist hier genau auf den Unterschied zwischen der Addition und der Multiplication zu sehen, damit diese Ausdrücke, wiewohl sie sich schon von selbst deutlich ge-

nug unterscheiden, nicht vermenget werden. Die Addition beschäftiget sich blofs mit den Coefficienten; die Multiplication hingegen mit den Coefficienten und Buchstaben zugleich.

1. a zu a	addirt, gibt $2a$.	$a\times a$	gibt aa.
2. a zu 0	addirt, gibt a.	$a\times 0$	gibt 0.
3. a zu $-a$	addirt, gibt 0.	$a\times -a$	gibt $-aa$.
4. $-a$ zu $-a$	addirt, gibt $-2a$.	$-a\times -a$	gibt $+aa$.
5. a zu 1	addirt, gibt $a+1$.	$a\times 1$	gibt a.
6. $2a$ zu $-3b$	addirt, gibt $2a-3b$.	$2a\times -3b$	gibt $-6ab$.

Addiren nähmlich heifst, Gröfsen mit ihren eigenen Zeichen verbinden, und eine zusammenhängende Gröfse (§. 15.) daraus machen. Multipliciren hingegen heifst, aus einer einfachen Gröfse eine zusammengesetzte machen, welches geschieht, wenn man die Buchstaben ohne Zwischenzeichen verbindet. Die Richtigkeit defsen wird man noch mehr einsehen, wenn man Zahlen an die Stelle der Buchstaben setzet. Nehmen wir also an: a sey gleich 4, so ist $2a$ oder $4+4$ oder $2\times 4=8$; $a\times a$ oder $4\times 4=16$; $a+0=4$; $a\times 0$ oder $4\times 0=0$ u. s. w.

V. AUFGABE.

29. Algebraische Gröfsen dividiren.

AUFLÖSUNG.

Reg. für die Zeichen. Gleiche Zeichen geben einen bejahenden Quotienten oder $+$; verschiedene Zeichen geben einen verneinenden Quotienten oder $-$.

Reg. für die Coefficienten. Die Coefficienten werden nach den Regeln der Arithmetik dividiret.

Reg. für die Buchstaben. Unter der Gröfse des Dividendus wird eine Linie gezogen und der Divisor darunter geschrieben. Kommen in beyden Gröfsen die nähmlichen Buchstaben vor, so kann man in beyden eine gleiche Anzahl derselben wegstreichen.

BEYSPIELE.

$a : a$ gibt $\frac{a}{a}$; der Coefficient 1 (der hier §. 12. verstanden wird), mit 1 dividiret, gibt den Quotienten 1; a und a werden weggestrichen $\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}}$; also ist der Quotient eine Einheit 1.

$aa : a$ gibt den Quotienten $\frac{aa}{a}$ oder $\frac{\cancel{a}a}{\cancel{a}} = a$.

ab, mit a dividiret, gibt $\frac{ab}{a}$ oder $\frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}} = b$.

$16aaabc : 8abbcc$ gibt $\frac{16aaabc}{8abbcc}$ oder $\frac{16\cancel{a}aa\cancel{b}\cancel{c}}{8\cancel{a}\cancel{b}b\cancel{c}c} = 2\frac{aa}{bc}$.

$72ab : -9ab$ gibt $-\frac{72ab}{9ab} = -8$.

Bey zusammenhängenden Grölsen kann man, wie bey Zahlen, zu Werke gehen. Man schreibet den Divisor unter die Grölse des Dividendus, und suchet den Quotienten nach den vorhergehenden Regeln; diesen setzet man auf den Platz der Quotienten; dann multipliciret man mit ihm den Divisor, und subtrahiret das Product; in diesem verändert man die Zeichen, und reduciret dann den Dividendus, wie in dem folgenden Beyspiele:

$$
\begin{array}{l}
aa+2ab+bb\ (a+b \\
a+b \\
aa+ab \\
-\ \ - \\
\hline
\qquad ab+bb \\
\qquad a+b \\
\qquad ab+bb \\
\qquad -\ \ - \\
\hline
\qquad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Der erste Quotient von $aa : a$ ist a. Durch die Multiplication des Quotienten a mit dem Divisor $a+b$ erhält man das Product $aa+ab$, welches unter den Divisor geschrieben wird; dann verändert man die Zeichen für die Subtraction; $+aa$ und $-aa$ wird zu 0 reduciret, $2ab$ und $-ab$ zu ab; diesen Rest schreibet man unter die Linie und setzet die folgende Gröſse bb hinzu. Hat man den Divisor $a+b$ darunter geschrieben, so gibt $ab:a$ den Quotienten b, welcher an den Platz des Quotienten gesetzt wird. Dann multipliciret man mit b den Divisor $a+b$, und subtrahiret das Product $ab+bb$ mittels Veränderung der Zeichen. Nach gemachter Reduction, heben sich $+ab$ und $-ab$, ferner $+bb$ und $-bb$ wechselseitig auf, es bleibet nichts übrig, und die Aufgabe ist gelöset. Auf diese Art sind die unten folgenden Beyspiele vorgestellet.

BEWEIS.

Da die Division auflöset, was die Multiplication zusammensetzt, so müſsen durch die Division diejenigen Factoren erscheinen, welche das Product mittels der Multiplication zusammengesetzt haben. Da also $-$, mit $-$ multipliciret, jedes Mahl $+$ gibt, so ist es offenbar, daſs kein Product das Zeichen $-$ haben kann, wenn nicht die Factoren verschiedene Zeichen haben; also $-ab$ (das Product von $+a$, mit $-b$ multipliciret, oder von $-a$, mit $+b$ multipliciret) mit $+a$ dividiret, gibt den einen Factor $-b$, und mit $-a$ dividiret, gibt den andern Factor $+b$. Hingegen $+ab$ (das Product von $+a$, mit $+b$ multipliciret, oder $-a$ mit $-b$ multipliciret) mit $+a$ dividiret, gibt den einen Factor $+b$, und mit $-a$ dividiret, gibt den andern Factor $-b$. Eben das gilt für die Coefficienten und Buchstaben; indem man nähmlich die Factoren, welche dieses Vielfache oder diesen Dividendus zusammen setzen, durch die Division zu erlangen suchet.

I. BEYSPIEL.

$48aaa - 76aab - 64abb + 105bbb \ (12aa - 4ab - 21bb.$

$4a - 5b$ der Divisor.

$48aaa - 60aab$ das Product.

$- \quad +$ Veränderung der Zeichen.

$-16aab - 64abb$ der Rest mit der folg. Grösse.

$4a - 5b$ der Divisor.

$-16aab + 20abb$

$+ \quad -$

$-84abb + 105bbb$

$4a - 5b$

$-84abb + 105bbb$

$+ \quad -$

$0 \quad 0$

II. BEYSPIEL.

$18xxxx - 45xxx + 82xx - 67x + 40 (6xx - 7x + 8$

$3xx - 4x + 5$

$18xxxx - 24xxx + 30xx$

$- \quad + \quad -$

$-21xxx + 52xx - 67x$

$3xx - 4x + 5$

$-21xxx + 28xx - 35x$

$+ \quad - \quad +$

$+24xx - 32x + 40$

$3xx - 4x + 5$

$24xx - 32x + 40$

$- \quad + \quad -$

$0 \quad 0 \quad 0$

III. BEYSPIEL.

$$
\begin{array}{l}
16aaaa-72aabb+81bbbb \;(8aaa+12aab-18abb-27bbb \\
2a \quad - 3b \\
16aaaa-24aaab \\
- \qquad + \\
\hline
\qquad 24aaab-72aabb \\
\qquad 2a \quad - 3b \\
\qquad 24aaab-36aabb \\
\qquad - \qquad + \\
\hline
\qquad\qquad -36aabb+81bbbb \\
\qquad\qquad 2a \quad - 3b \\
\qquad\qquad -36aabb+54abbb \\
\qquad\qquad + \qquad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad -54abbb+81bbbb \\
\qquad\qquad\qquad 2a \quad - 3b \\
\qquad\qquad\qquad -54abbb+81bbbb \\
\qquad\qquad\qquad + \qquad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

ANMERKUNG.

30. Wenn ungleichnahmige zusammenhängende Grössen mit andern ungleichnahmigen zusammenhängenden zu dividiren sind, und in jeder dieser Grösen der nähmliche Buchstab ein Mahl oder öfter vorkommt, so kann man in beyden eine gleiche Anzahl dieser Buchstaben wegstreichen. Und wenn auch die Coefficienten einen gemeinschaftlichen Divisor zulassen, so werden sie überall durch gleiche Division zu kleineren Gliedern reduciret. Z. B. Wenn man von $\frac{8abc-4bcd}{40abc+8adcb}$ überall bc wegstreichet, und jeden Coefficienten mit 4 dividiret, so wird

$\frac{2a-d}{10a+2ad}$; ferner $\frac{4aac-6a+8aaad}{10a-6ab}$ gibt $\frac{2ac-3+4aad}{5-3b}$.

ANMERKUNG.

31. Die Division, oder Auflösung einer Gröſse in ihre Factoren, kommt in der Algebra häufig vor, und ist daher wohl zu merken. So wird ab aus a und b zusammengesetzt; bcc aus b und cc, oder aus bc und c; $4xx+2x$ aus $2xx+x$ und 2, oder aus $2x+1$ multipliciret mit $2x$; ferner $ad-d$ aus $a-1$ und d; denn wenn man $a-1$ mit d multipliciret, so hat man $ad-d$. Eben so erhält man $dnn+dn-d$ aus $nn+n-1$ und d. Und so mit den übrigen.

III. HAUPTSTÜCK.

VON DEN ALGEBRAISCHEN BRÜCHEN.

I. AUFGABE.

32. Algebraische Brüche zu kleineren Gliedern reduciren.

AUFLÖSUNG.

Diese geschieht nach den Regeln, welche oben bey der Division (§. 29.) vorgetragen worden sind. Wenn so wohl in dem Zähler, als in dem Nenner der nähmliche Buchstab vorkommt, so wird von beyden Seiten eine gleiche Anzahl weggestrichen, und die Coefficienten werden nach den in der Arithmetik gegebenen Regeln reduciret. Auf solche Art also wird ein Bruch ohne

Veränderung seines Werthes mit kleineren Gliedern ausgedrückt. Z. B. $\frac{2abcd}{4adf}$ wird zu $\frac{bc}{2f}$ reduciret.

BEWEIS.

Wenn man eine Gröſse mit einer gleichen Gröſse multipliciret und dividiret, so wird ihr Werth nicht verändert, weil das Ganze, um wie viel Theile es vermehret worden ist, um eben so viel wieder vermindert wird; nun aber sind die Buchstaben in dem Zähler die Multiplicatoren, und in dem Nenner die Divisoren; also wenn man gleiche Multiplicatoren und Divisoren wegstreichet, so wird der Bruch, ohne Veränderung seines Werthes, mit kleineren Gliedern ausgedrückt.

II. AUFGABE.

33. Brüche addiren und subtrahiren.

AUFLÖSUNG.

Die Brüche werden erstlich, nach den Regeln der Arithmetik, zu einem gemeinschaftlichen Nenner reduciret, und dann die Zähler addiret oder subtrahiret. Z. B. $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$, reduciret zu $\frac{ad}{cd}$ und $\frac{bc}{cd}$; dann addiret $\frac{ad+bc}{cd}$ oder subtrahiret $\frac{ad-bc}{cd}$.

Der Beweis ist der nähmliche, welcher in der Arithmetik gegeben worden ist.

ANMERKUNG.

34. Da man zu diesem Verfahren nur Zeichen brauchet (§. 7.), so kann die Addition und Subtraction, ohne daſs man zu einem gemeinschaftlichen Nenner reduciret, bloſs durch Vorsetzung der Zeichen $+$ oder $-$ gemacht werden. Z. B. wenn $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ zu addiren ist, so kann man schreiben $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$; will man es subtrahiren, so ist es $\frac{a}{c} - \frac{b}{d}$.

III. AUFGABE.

35. Brüche multipliciren und dividiren.

AUFLÖSUNG.

Bey der Multiplication werden die Zähler mit einander, und auch die Nenner mit einander multipliciret. Das nähmliche geschieht bey der Division, nur daſs man vorher den Divisor umkehret. Beyde Rechnungsarten sind also von den in der Arithmetik vorgetragenen Regeln nicht verschieden. Z. B. $\frac{a}{c} \times \frac{b}{d}$ gibt $\frac{ab}{cd}$; aber $\frac{a}{c}$, dividiret mit $\frac{b}{d}$, wird $\frac{a}{c} \times \frac{d}{b}$ das ist $\frac{ad}{cb}$.

Der Beweis kommt mit dem überein, der schon in der Arithmetik angeführt worden ist.

ANMERKUNG.

36. Alles dasjenige, was wir in der Arithmetik von Brüchen gesagt haben, kann auf die Buchstabenrechnung angewandt werden. So wird ein Ganzes zu einem Bruche reduciret, wenn man statt des Nenners eine Einheit schreibet. Ein Ganzes wird zu einem Bruche addiret, wenn man jenes mit dem Nenner multipliciret, und unter das Product

den vorigen Nenner setzet; z. B. aus $a + \frac{b}{d}$ wird $\frac{ad+b}{d}$; und so von den übrigen, wie es schon aus der Arithmetik bekannt ist.

IV. HAUPTSTÜCK.

VON DEN WÜRDEN (DIGNITÄTEN ODER POTENZEN).

I. ERKLÄRUNG.

37. Wenn eine Gröſse oder Zahl mit sich selbst multipliciret wird, so heiſst das Product die *zweyte Würde* dieser Gröſse oder Zahl; und diese Grösse oder Zahl heiſst in Rücksicht der zweyten Würde, die *Wurzel* oder *erste Würde*. Z. B. aa ist die zweyte Würde von der Wurzel a; 16 ist die zweyte Würde von der Wurzel 4, denn $4 \times 4 = 16$. Die erste Würde ist also jede Gröſse selbst a oder b und so weiter.

I. ANMERKUNG.

38. Diejenige Würde oder Potenz, welche gleich aus der ersten Multiplication entstehet, nennet man insgemein *Quadrat (Viereck)*, weil die mit sich selbst multiplicirten und in die gehörige Ordnung gesetzten Theile einer solchen Wurzel immer eine viereckige Figur vorstellen, nähmlich eine Figur, die gleich lang und breit ist. Z. B. 16 hat auf jeder Seite vier Theile; 36 auf jeder Seite 6; $6 \times 6 = 36$; 144 auf jeder Seite 12, denn $12 \times 12 = 144$.

II. ANMERKUNG.

39. Die zweyte Würde, oder das Quadrat, wenn es mit der Wurzel wieder multipliciret wird, gibt die dritte Würde, welche *Kubus* (κυβος, *Würfel*) heiſst, weil in der Geometrie ein Körper, welcher gleich lang, breit und tief ist, ein Kubus genannt wird. Z. B. $aa \times a$ gibt aaa die dritte Würde; 16×4 gibt 64 den Kubus von der Wurzel 4; 49×7 gibt 343 den Kubus von der Wurzel 7.

III. ANMERKUNG.

40. Wird die dritte Würde abermahl mit der Wurzel multipliciret, so erhält man die vierte Würde; und wird auch diese mit der Wurzel multipliciret, die fünfte Würde; und so kann jede Gröſse auf alle nur mögliche Würden oder Potenzen, durch die bloſse Multiplication der letzt vorhergehenden Würde mit der Wurzel, erhoben werden.

FOLGERUNG.

41. Aus dem Gesagten erhellet, daſs kein Quadrat verneinend seyn kann; denn die Wurzel mag $+a$, oder $-a$ seyn, so ist das Product immer $+aa$. Der Kubus aber kann verneinend seyn, wenn die Wurzel verneinend ist; denn $+aa \times -a$ gibt $-aaa$. Die vierte Würde ist wieder bejahend, weil $-aaa \times -a = +aaaa$; und so von den übrigen.

II. ERKLÄRUNG.

42. Die Wurzeln haben eben so, wie die Würden oder Potenzen ihre eigenen Benennungen; so heiſst die Wurzel, in Rücksicht auf das Quadrat, *Quadrat-Wurzel;* in Rücksicht auf den Kubus, *Kubik-Wurzel*; in Rücksicht auf die vierte Würde, die *vierte Wurzel* u. s. f. Um die Wurzel jeder Würde anzuzeigen, brauchet man das Zeichen $\sqrt{}$, und über diesem schreibet man die Zahl, welche diejenige Würde andeutet, deren Wurzel

bezeichnet wird. Z. B. $\sqrt[2]{}$ ist das Zeichen der Wurzel von der zweyten Würde; oder von dem Quadrate; $\sqrt[3]{}$ das Zeichen der Wurzel von der dritten Würde, oder von dem Kubus; $\sqrt[4]{}$ das Zeichen der Wurzel von der vierten Würde. $\sqrt[2]{a}$ ist die Quadrat - Wurzel von der Gröſse a. Hierbey ist zu merken, daſs diese Quadrat - Wurzel oder die Wurzel der zweyten Würde auch ohne darüber geschriebene Ziffer angezeiget werden kann, nähmlich $\sqrt{a}$. So oft also dieses Zeichen ohne darüber geschriebene Ziffer vorkommt, bedeutet es eine Quadrat-Wurzel. Wird es bey einer zusammenhängenden Gröſse gebraucht, so wird diese mit Klammern eingeschloſsen, um anzuzeigen, daſs die Wurzel der ganzen Gröſse zu nehmen sey. Z. B. $\sqrt[3]{}(aa+b)$, oder man ziehet oben eine Linie $\sqrt[4]{a+b}$.

ANMERKUNG.

43. Da die Würden, aus der Multiplication einer Gröſse mit ihr selbst, entstehen, so muſs man die Gröſse so oft setzen, als Würden verlangt werden; z. B. die zweyte Würde von a ist aa, oder der Buchstab a zwey Mahl gesetzt. Die siebente Würde von a ist $aaaaaaa$, oder a sieben Mahl gesetzt. Aber diese langweilige Schreiberey kann man vermeiden, wenn man den Buchstaben, zur Rechten etwas oberhalb, Zahlen anhänget, welche anzeigen, wie oft jene Gröſse mit der Wurzel multipliciret, oder zur wievielten Würde sie erhoben sey; also, statt der vorher sieben Mahl gesetzten a, schreibet man a^7. Diese Zahl heiſst der *Exponent* der Würde (oder die *Würdezahl*); hieraus folget

III. ERKLÄRUNG.

44. *Würdezahl* oder der *Exponent* ist diejenige Zahl, welche anzeiget, zu welcher Potenz oder Würde eine Gröſse erhoben worden ist. Der Exponent der ersten Würde ist also 1, wird aber nicht ausgedrückt, sondern schon verstanden; denn jede Gröſse, so wie sie einen Coefficienten hat, muſs auch einen Exponenten haben; a ist die erste Würde; a^2 die zweyte oder das Quadrat; a^3 die dritte oder der Kubus u. s. f.

ANMERKUNG.

45. Da auch eine Würde unbestimmt seyn kann, gleichwie manchmahl eine Gröſse unbestimmt ist, so wird auch der Exponent bisweilen mit einem Buchstaben ausgedrückt; z. B. b^m bedeutet, daſs die Gröſse b zur Würde m erhoben sey; $a^n b$ heiſst, die Gröſse a, erhoben zur Würde n, und multipliciret mit b.

I. FOLGERUNG.

46. Diejenigen Gröſsen, welche verschiedene Exponenten haben, sind ungleichnahmig. Denn da der Exponent anzeiget, wie oft der Buchstab gesetzt sey, so muſs, wenn die Exponenten verschieden sind, auch die Anzahl der Buchstaben verschieden seyn, und eben darum sind die Gröſsen ungleichnahmig. Daher können zwey Gröſsen, welche verschiedene Exponenten haben, in eine unzusammenhängende Gröſse oder in ein Glied nicht vereiniget werden. Z. B. aus $2a^3+4a^2$ kann keine unzusammenhängende Grösse werden; hingegen $2a^3+4a^3$ machen $6a^3$. Wenn also Grössen, die verschiedene Exponenten haben, zu addiren oder zu subtrahiren sind, so müſsen sie in der Ordnung ohne Reduction geschrieben werden.

II. FOLGERUNG.

47. Bey der Multiplication der Gröſsen hat man nur

nöthig die Exponenten zu addiren; z. B. $a^3 \times a^2$ gibt a^{3+2} oder a^5; $a^2 b^3 c^2 \times a^4 b^2 c^3$ gibt $a^6 b^5 c^5$. Denn jeder Exponent zeiget an, wie oft der nähmliche Buchstab so wohl in dem einen als in dem andern Factor gesetzt sey; in dem Producte aber müſsen diese Buchstaben verbunden, oder so oft gesetzt werden, als in beyden Factoren Einheiten sind; die Summe der Einheiten zeiget also die Summe der Buchstaben an, und so erhält man durch die Addition der Exponenten den Exponenten des Productes; z. B. $a^6 \times a^3$ gibt a^{6+3} oder a^9; denn $a^6 = aaaaaa$ und $a^3 = aaa$; diese zusammen multipliciret, geben $aaaaaaaaa$ oder a^9; $a \times a$ ist a^{1+1} oder a^2; $a^m \times a^n$ ist a^{m+n}; $a^m \times a$ ist a^{m+1}; $a^m \times a^m$ ist a^{m+m} oder a^{2m}; $a^m \times bx$ ist $a^m bx$.

ANMERKUNG.

48. Bey der Division, welche der Multiplication entgegen gesetzt ist, müſsen die Exponenten subtrahiret werden; denn da man eine gleiche Anzahl der nähmlichen Buchstaben so wohl in dem Dividendus als in dem Divisor wegstreichen kann, so ist es eben so viel, als wenn man von dem oberen Exponenten so viel Einheiten subtrahiret, als der untere Exponent Einheiten hat. Z. B. $a^9 : a^3$ gibt $a^{9-3} = a^6$; denn wenn man von $\frac{aaaaaaaaa}{aaa}$ sowohl oben als unten drey a oder aaa wegstreichet, so bleiben $aaaaaa$ oder a^6. $a : a$ gibt a^{1-1} oder $a^0 = 1$, weil der Coefficient 1 in 1 ein Mahl enthalten ist; $\frac{a}{a}$ wird weggestrichen; also $a : a$ oder $a^0 = 1$. $a^m : a^n = a^{m-n}$. $a^3 : a^5$ gibt $a^{3-5} = a^{-2}$. $b^m : b = b^{m-1}$. Eine Gröſse also, deren Exponent eine Nulle ist, ist einer Einheit gleich; eine Gröſse aber, die einen verneinenden Exponenten hat, ist einem Bruche gleich.

I. AUFGABE.

49. Eine Gröſse zu einem Quadrate

oder einer andern bestimmten oder unbestimmten Würde erheben.

AUFLÖSUNG.

Die gegebene Gröſse muſs mit sich selbst ein Mahl, wenn man ein Quadrat; zwey Mahl, wenn man einen Kubus verlangt u. s. w. multipliciret werden. Überhaupt man multipliciret den Exponenten der gegebenen Gröſse mit dem Exponenten der Würde, welche verlangt wird; oder man multipliciret den Exponenten der gegebenen Gröſse so oft mit ihm selbst, das ist, mit der Wurzel, als in dem Exponenten der zu suchenden Würde Einheiten, eine weniger, enthalten sind. Das Quadrat von a ist $a \times a$ oder aa, das ist, $a^{1 \times 2} = a^2$. Der Kubus von $a \times a \times a$ oder $aa \times a$ das ist $a^{1 \times 3} = aaa$ oder a^3. Soll die Gröſse a^m zur Würde n erhoben werden, so multipliciret man m mit n, dann hat man $a^{m \times n}$ oder a^{mn} die gesuchte Würde; a zur neunten Würde erhoben, ist $a^{1 \times 9} = a^9$, oder a^3 zwey Mahl mit sich selbst multipliciret, $a^3 \times a^3 = a^{3+3} = a^6$; das nämliche mit a^3 multipliciret, gibt $a^{6+3} = a^9$. Soll man a^2 zur sechsten Würde erheben, so wird $a^{2 \times 6} = a^{12}$; denn aa, fünf Mahl mit aa multipliciret, gibt a^{12}.

BEWEIS.

Die zweyte Würde ist nach der obigen Erklärung (§. 37.) das Product einer Gröſse, die mit sich selbst ein Mahl, die dritte Würde das Product einer Gröſse, die mit sich selbst zwey Mahl, die vierte Würde das Product einer Gröſse, die mit sich selbst drey Mahl u. s. w. multipliciret ist; wenn also eine Zahl so oft mit sich selbst multipliciret wird, als in dem Exponenten der zu suchenden Würde Einheiten, eine weniger, enthalten sind, so hat man die gesuchte Würde.

ANMERKUNG.

50. Wenn eine eingliederige Gröſse zu einer Würde zu erheben ist, so muſs man zu jedem Buchstaben den Exponenten jener Würde schreiben. Auch bey Brüchen muſs dieses so wohl bey dem Zähler als bey dem Nenner geschehen. Z. B. die fünfte Würde von abc ist $a^5b^5c^5$; die Würde m der Gröſse $\frac{ab}{cd}$ ist $\frac{a^m b^m}{c^m d^m}$. Der Kubus von $\frac{2ab}{5fg}$ ist $\frac{8a^3b^3}{125f^3g^3}$. Dieſs kann man bisweilen auf solche Art anzeigen, daſs die Gröſse mit Klammern eingeschloſsen, oder eine Linie darüber gezogen, und oberhalb zur Rechten der Exponent der Würde gesetzt wird. Das erste Beyspiel wäre also dergestalt auszudrücken $(abc)^5$ oder $\overline{abc}^5$; eben so wäre die Würde m von $aa-bc$ zu schreiben $(aa-bc)^m$ oder $\overline{aa-bc}^m$.

ANMERKUNG.

51. Ist eine zweygliederige Gröſse zu einem Quadrate zu erheben, so wird dieses nach den gewöhnlichen Regeln der Multiplication gemacht. Z. B. das Quadrat von $a+b$ oder $-a-b$ ist $aa+2ab+bb$; das Quadrat von $-a+b$ ist $aa-2ab+bb$. Hieraus flieſset folgender

I. LEHRSATZ.

52. Das Quadrat einer zweygliederigen Gröſse besteht aus dem Quadrate des ersten Gliedes, aus dem Quadrate des zweyten Gliedes, und aus dem doppelten Producte der mit einander multiplicirten Glieder.

BEWEIS.

Denn nach gemachter Multiplication hat man *aa* und *bb* das Quadrat beyder Glieder, und nebstbey $2ab$, nähmlich das doppelte Product des einen mit dem andern multiplicirten Gliedes. Ist dieses ein bejahendes Product, so haben die Glieder gleiche Zeichen; ist es ein verneinendes, so haben sie ungleiche.

IV. ERKLÄRUNG.

53. Ein *vollständiges* Quadrat heiſst dasjenige, wenn die oben erwähnten drey Gröſsen vorhanden sind; wenn aber eine aus diesen, z. B. das Quadrat des zweyten Gliedes, mangelt, so heiſst es ein *unvollständiges* Quadrat.

ANMERKUNG.

54. Wenn eine zweygliederige Gröſse zum Kubus erhoben wird, so muſs man das Quadrat $aa+2ab+bb$ wieder mit der Wurzel $a+b$ multipliciren; dann hat man $a^3 +3a^2b+3ab^2+b^3$. Hieraus flieſst der

II. LEHRSATZ.

55. Der Kubus einer zweygliederigen Gröſse besteht aus dem Kubus des ersten und zweyten Gliedes, und aus den Producten des dreyfachen Quadrates eines jeden mit dem andern multiplicirten Gliedes.

BEWEIS.

Denn durch die Multiplication erhält man a^3 und b^3 die Kuben der Glieder a und b; man erhält ferner $a^2\times b$ und $b^2\times a$; beydes mit 3 multipliciret; also erhält man das dreyfache Quadrat des ersten mit dem zweyten multiplicirten Gliedes, und das dreyfache Quadrat des zweyten mit dem ersten multiplicirten Gliedes. Was zu beweisen war.

I. ANMERKUNG.

56. Auf diese Art kann man für jede andere Würde Formeln machen, und daraus Lehrsätze ableiten.

II. ANMERKUNG.

57. Was bisher gesagt worden ist, kann auch durch Zahlen vorgestellet werden. Z. B. Löset man 12 in zwey Zahlen 10 und 2 auf, und machet nach algebraischer Art das Quadrat, so hat man

$$\begin{array}{r} 10+2 \\ 10+2 \\ \hline 100+20 \\ +20+4 \\ \hline 100+40+4 \end{array}$$

das ist das Quadrat von 10=100, das doppelte Product von 10×2=40, und das Quadrat von 2=4 oder

$$\begin{array}{r} 100 \\ 40 \\ 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

das ganze Quadrat zusammen 144, welches man auch erhält, wenn 12 mit 12 multipliciret wird.

III. ANMERKUNG.

58. Wenn einfache Zahlen von 1 bis 9 zu einem Quadrate erhoben werden, so kann dieses nur aus zwey Ziffern bestehen, welches aus der Multiplication dieser mit sich selbst multiplicirten Zahlen erhellet; von 10 bis 100 haben die Quadrate drey oder vier Ziffer; von 100 bis 1000 haben sie fünf oder sechs Ziffer, und so fort. Bey dem Kubus, wenn das Quadrat von 9 wieder mit 9 multipliciret wird, entstehen nur drey Ziffer; der Kubus von 10 hat aber schon vier; der Kubus von 100 hat sieben; der Kubus von 1000 hat 10 Ziffer und so fort. Dieses alles zeiget sich deutlich aus der Multiplication oder Erhebung der Zahlen zu Würden. Die Quadrate und Kuben der ersten neun Ziffer werden in folgender Tabelle dargestellet.

Wurzel.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrat.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Kubus.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Aus einer gegebenen Zahl kann man also gleich abnehmen, wie viel Ziffern die Wurzel haben müſse. Eine oder zwey Quadratziffer haben eine einzige Wurzelziffer; drey oder vier Quadratziffer haben zwey Wurzelziffer u. s. f. Eine, zwey, oder drey Kubikziffer haben eine Wurzelziffer; vier, fünf, oder sechs Kubikziffer haben zwey Wurzelziffer; sieben, acht, oder neun Kubikziffer haben drey; u. s. w.

V. ERKLÄRUNG.

59. Ein *vollkommenes* Quadrat ist dasjenige, aus welchem sich die Wurzel ausziehen läſst; ein *unvollkommenes*, welches keine wahre Wurzel hat. So ist 16 ein vollkommenes Quadrat, die wahre Wurzel ist 4; 12 ist ein unvollkommenes, weil es eine *taube*, das ist, keine wahre Wurzel hat. Die unvollkommenen Quadrate heissen auch *irrationale* Gröſsen, wovon weiter unten gehandelt wird.

ANMERKUNG.

60. Jede Quadratzahl hat am Ende eine von diesen fünf Ziffern 1, 4, 5, 6, 9, oder zwey, oder mehrere Nullen, denen eine von diesen Ziffern vorgehet; eine Zahl hingegen, welche am Ende nur eine einzige Nulle, oder eine von den Ziffern 2, 3, 7, 8 hat, ist schon eben darum keine Quadratzahl. Doch ist dieses nicht so zu verstehen, daſs jede Zahl, welche am Ende eine der oben erwähnten Ziffern hat, schon deſswegen eine Quadratzahl sey. Durch die Ausziehung der Wurzel kann man dieses am deutlichsten einsehen.

II. AUFGABE.

61. Aus einer gegebenen eingliederi-

gen Größe die verlangte Wurzel, z. B. die Quadrat- oder Kubikwurzel, ausziehen.

AUFLÖSUNG.

Man dividiret den Exponenten der gegebenen Größe mit der Zahl, welche anzeiget, die wievielte Wurzel verlanget werde. Z. B. wenn aus a^2 die zweyte, oder Quadrat-Wurzel auszuziehen ist, so dividiret man den Exponenten 2 mit 2, und dann hat man $a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$. Ist aus a die zweyte Wurzel auszuziehen, so wird $a^{\frac{1}{2}}$ Ist aus a^4 die Wurzel der vierten Würde auszuziehen, so wird $a^{\frac{4}{4}} = a$. Ist aus der nähmlichen Grösse die zweyte Wurzel auszuziehen, so wird $a^{\frac{4}{2}} = a^2$. Ist im allgemeinen aus a^m die Wurzel n auszuziehen, so wird $a^{\frac{m}{n}}$. Soll bloß die Ausziehung der Wurzel ausgedrückt werden, so setzet man der Größe das Wurzel-Zeichen (§. 42.) mit seinem Exponenten vor. Z. B. $\sqrt[4]{a^2}$, oder $\sqrt[n]{a^m}$.

BEWEIS.

Eine Größe wird zur Würde erhoben, wenn man die Größe mit dem Exponenten der verlangten Würde multipliciret (§. 49.); also wird aus einer Würde die Wurzel ausgezogen, wenn man den Exponenten der gegebenen Würde mit derjenigen Zahl dividiret, welche anzeiget, die wievielte Wurzel verlanget werde. Denn die Division löset auf, was die Multiplication zusammen setzet; nun aber entstehet die Würde durch die Multiplication; also wird die Würde durch die Division in ihre Wurzel aufgelöset.

ANMERKUNG.

62. Die Wurzel eines Zahlen - Quadrates von einer oder mehreren Ziffern ist oben in der Tabelle (§. 58.) zu finden.

III. AUFGABE.

63. Aus einer zweygliederigen Gröſse die Quadrat - Wurzel ausziehen.

AUFLÖSUNG UND BEWEIS.

Da jedes zweygliederige Quadrat aus dem Quadrate des ersten Gliedes, aus dem doppelten Producte der Glieder, und aus dem Quadrate des zweyten Gliedes bestehet, so erhält man die zweygliederige Wurzel, wenn man von dem ersten Quadrate a^2 die Wurzel nimmt, welche der erste Theil der ganzen Wurzel und zugleich der eine Factor des doppelten Productes seyn wird; dieses mit dem doppelten ersten Factor dividiret, gibt den andern Factor, welcher zugleich der zweyte Theil der ganzen Wurzel seyn wird; dann muſs das Quadrat beyder Wurzeln von der ganzen Gröſse, in welcher diese enthalten sind, sammt dem doppelten Producte der Wurzeln subtrahiret werden. Z. B. aus $aa+2ab$ $+bb$ wird die Wurzel ausgezogen, wenn man von dem Quadrate aa die Wurzel, nähmlich a, nimmt, welche man an die Stelle des Quotienten setzet; aus dieser wird das Quadrat gemacht, und von der Gröſse aa subtrahiret, $aa-aa$ $=0$. Nun ist noch

$$
\begin{array}{l}
aa+2ab+bb\ (a+b \\
-aa \\
\hline
\quad +2ab \\
\quad\ \ 2a \\
\quad -2ab \\
\hline
\qquad\quad +bb \\
\qquad\quad +bb \\
\qquad\quad\ - \\
\hline
\qquad\ 0.
\end{array}
$$

$2ab+bb$ übrig. Den gefundenen Quotienten a nimmt man doppelt oder $2a$, und dividiret mit ihm das Glied $2ab$; dadurch erhält man den Quotienten b, nähmlich die zweyte Wurzel, welche, mit dem Divisor multipliciret, das Product $2ab$ gibt, wird nun dieses von $2ab$ subtrahiret, so bleibet nichts. Endlich macht man von dem gefundenen b das Quadrat und subtrahiret es.

I. ANMERKUNG.

64. Ist das doppelte Product verneinend, so ist es ein Zeichen, daſs die eine oder die andere Wurzel das Zeichen $-$ habe; dieſs erhellet aus der Multiplication $a-b$ mit $a-b$, oder $-a+b$ mit $-a+b$; immer wird das Product $a^2-2ab+b^2$ seyn.

II. ANMERKUNG.

65. Eben diese Regeln gelten auch bey der Ausziehung der Wurzeln aus Zahlen. Denn da diese durch die Multiplication in die nähmlichen Gröſsen zusammen gesetzt werden, so laſsen sie sich auch auf eben diese Art in Wurzeln auflösen.

IV. AUFGABE.

66. Aus Zahlen die Quadrat-Wurzel ausziehen.

AUFLÖSUNG.

I. Man theilet die gegebene Zahl in Claſsen von der Rechten zur Linken, so zwar, daſs in jeder Claſse zwey Ziffer sind (die erste Claſse zur Linken kann auch nur eine einzige Ziffer haben); so viel also Claſsen sind, eben so viel werden Wurzel-Ziffern seyn (58.).

II. Dann sieht man in der obigen Tabelle nach, ob die erste Claſse ein vollkommenes Quadrat sey oder nicht. Ist es ein solches, so schreibet man es unter die erste Claſse; widrigen Falls nimmt man das zunächst kleinere Quadrat, und schreibet es unter die erste Claſse; die Wurzel dieses Quadrates aber setzet man an die Stelle des Quotienten.

III. Hierauf wird das Quadrat von der ersten Claſse subtrahiret, und zu dem Reste, wenn einer ist, die folgende Claſse herab gesetzet.

IV. Der gefundene Quotient wird verdoppelt, und als Divisor unter die vorigen Ziffern dergestalt geschrieben, daſs der Platz unter der letzten Ziffer zur rechten Hand leer bleibet.

V. Nun untersuchet man, wie oft der Divisor in den oben stehenden Ziffern enthalten sey, und setzet den Quotienten so wohl zu der vorigen Wurzel an die Stelle der Quotienten, als auch neben dem Divisor auf den leeren Platz.

VI. Diese ganze Zahl wird dann mit der zuletzt gefundenen Wurzel multipliciret, und das Product von den oben stehenden Ziffern subtrahiret, wie folgendes Beyspiel zeiget.

Es sey aus 529 die Wurzel auszuziehen.

I. Reg.	5,29	die Theilung in Claſsen (23 die Wurzeln.
II.	4	das zunächst kleinere Quadrat, die Wurzel 2.
III.	129	der Rest nebst der folgenden Claſse.
IV. u. V.	43	das Doppelte des Quotienten 2=4 der Divisor, der Quotient 3 an die Stelle der Wurzeln gesetzt, und zugleich unter 9 auf den leeren Platz.
VI.	129	die Multiplication mit 3, und die Subtraction.
	0	

BEWEIS.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet aus der Anwendung der algebraischen Formel. Die zweyte Wurzel wird deſswegen auf dem leeren Platze dem Divisor beygesetzt, damit man zugleich das Quadrat dieser Wurzel habe, wenn man eine Zahl mit ihr selbst multipliciret; denn es muſs so wohl dieses Quadrat, als auch das doppelte Product der Wurzeln von der ganzen Gröſse subtrahiret werden, welches beydes auf diese Art erlanget wird.

ANMERKUNG.

67. Wenn nach der zweyten Claſse eine dritte folget, und also die Wurzel aus drey Ziffern bestehet, so wird die Rechnung, von der vierten Regel anzufangen, fortgeführet. Zu dem Reste der vorigen Subtraction schreibet man die folgende Claſse, welches Ganze schon eine neue aufzulösende Zahl ist. Von den vorigen zwey Wurzeln nimmt man das Doppelte, welches wieder unter die aufzulösende Zahl dergestalt geschrieben wird, daſs unter der letzten Ziffer ein leerer Platz bleibet. Der aus dieser neuen Division entstandene Quotient ist die dritte Wurzel, welche an die Stelle des Quotienten, und zugleich auf den leeren Platz gesetzet wird; diese Wurzel sammt dem Divisor wird dann mit dem neuen Quotienten multipliciret, und so erhält man das zu subtrahirende Product. Ist noch eine Claſse übrig, so wird diese zu dem Reste herab gesetzt und von den vorigen drey Wurzeln das Doppelte genommen, um einen Divisor zu haben, und so fährt man mit der Rechnung, wie vorher, fort, bis alle Claſsen aufgelöset sind. Fiele während der Rechnung die zu subtrahirende Zahl zu groſs aus, als daſs sie subtrahiret werden könnte, so wird ein kleinerer Quotient genommen, wie bey der gewöhnlichen Division. Dieser Fall kommt in dem folgenden Beyspiele in beyden Divisionen vor.

Beysp. 6,15,04 (248	die Wurzeln.
4	das zunächst kleinere Quadrat, deſsen Wurzel 2 ist.
215	der Rest mit der folgenden Claſse.
44	die doppelte Wurzel mit dem neuen Quotienten 4.
176	das zu subtrahirende Product.
3904	der Rest mit der folgenden Claſse.
488	die doppelte Wurzel 24×2 mit dem neuen Quotienten 8.
3904	das zu subtrahirende Product.
0	

ANMERKUNG.

68. Auch eine 0 kann an die Stelle der Wurzel kommen, wie bey der gewöhnlichen Division, wenn nähmlich das doppelte Product der vorigen Wurzeln in der auſzulösenden Zahl nicht enthalten ist; und dann wird ohne weiteres sogleich die folgende Claſse zur vorigen gesetzt, und die Rechnung durch Verdoppelung der neuen Wurzeln fortgeführet, wie in dem folgenden Beyspiele.

Beysp. 16,45,92,49 (4057	
16	das zu subtrahirende Quadrat, deſsen Wurzel 4 ist.
45	die folgende Claſse.
8	die doppelte Wurzel, der Quotient ist 0.
4592	die neue zur vorigen herabgesetzte Claſse.
805	die doppelte Wurzel 40×2 mit der neuen Wurzel 5.
4025	das mit dem Divisor multiplicirte Product des Quotienten, welches zu subtrahiren ist.
56749	der Rest mit der neuen Claſse.
8107	die doppelte Wurzel 405×2 mit der neuen Wurzel 7.
56749	das Product, welches zu subtrahiren ist.
0	

ANMERKUNG.

69. Die Probe der richtig ausgezogenen Wurzel wird gemacht, wenn man die gefundene Wurzel mit ihr selbst multipliciret oder zum Quadrat erhebet, und dann sieht, ob die gegebene Quadratzahl heraus komme, wie in dem folgenden Beyspiele.

```
I. Beysp. 9,57,90,25 (3095          Probe.
          9                          3095
          ---                        3095
          57                        -----
           6                        15475
          ----                     27855
          5790                    92850
           609                    -------
          5481                    9579025
          -----
          30925
           6185
          30925
          -----
              0
```

```
II. Beysp. 346921 (589      III. Beysp. 16,00,00 (400
           25                           16
           ---                          ---
           969                          000
           108                           00
           864                          ----
           -----                        0000
           10521                         000
            1169                        ----
           10521                           0
           -----
               0
```

IV. Beyspiel.

36,09,60,64 (6008
36
―――
009
12
―――
0960
120
―――
96064
12008
96064
―――
0

ANMERKUNG.

70. Wenn am Ende ein Rest bleibet, so ist es ein Zeichen, daſs die gegebene Zahl kein vollkommenes Quadrat sey, und daſs man daher keine wahre Wurzel (§. 59.) erhalten könne. Dieſs pflegt man durch das vorgesetzte Zeichen $\sqrt{\ }$ auszudrücken, als $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{20}$; $\sqrt{128}$ u. s. w. Man kann aber doch durch die Ausziehung die nächst wahre Wurzel finden, wenn man die Ausziehung der Wurzel mittels der zehntheiligen Brüche weiter fortsetzet; dieſs geschieht, wenn man zu dem letzten Reste eine neue Claſse von zwey Nullen 00 hinzu setzet, welche als zehntheilige Brüche betrachtet werden; und die heraus gebrachte Wurzel bestehet in Zehntheilen. Wird nun zu dem Reste eine neue Claſse von zwey Nullen hinzu gesetzt, so entstehet ein Bruch von Hunderttheilen. Auf solche Art kann man so lange fortfahren, als man will, gleich wie bey der gewöhnlichen Division eine Nulle zum Dividendus bis ins Unendliche hinzu gesetzt, und so der Quotient fortgeführet werden kann. Nach diesen Regeln wird die Wurzel aus 1,29 und aus 5,40 ausgezogen, wie in den folgenden Beyspielen.

Beysp. 1,29 (11,35 u. s. f.	Beysp. 5,40 (23,23 u. s. w.
1	4
29	140
21	43
21	129
800	1100
223	462
669	924
13100	17600
2265	4543
11325	13929
1775	3671

ANMERKUNG.

71. Bey Quadratbrüchen ist so wohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner die Wurzel auszuziehen. Z. B. $\frac{4}{25}$ gibt die Wurzel $\frac{2}{5}$; $\frac{36}{81}$ gibt $\frac{6}{9}$. Bey zehntheiligen Brüchen verfährt man wie bey ganzen Zahlen; hier aber ist wohl zu merken, daſs die Zahl der Glieder immer gerade seyn müſse; ist sie also ungerade, so wird am Ende eine Nulle angehängt; auf solche Art entstehet, ohne Veränderung des Werthes (§. 110.), eine gerade. Der Grund davon ist, weil ein zehntheiliger Bruch immer einen Nenner, der eine Einheit mit Nullen hat, voraus setzet, und zwar in diesem Falle einen Nenner von einer Quadratgröſse, wo die Zahl der Nullen immer gerade seyn muſs, wie aus den Quadraten der Zahlen 10, 100, 1000 u. s. f. erhellet; denn die Quadrate sind 100, 10000, 1000000; nun aber sind in dem Zähler so viel Ziffern, als in dem Nenner Nullen sind; also muſs auch die Zahl der Ziffern gerade seyn. Ist sie aber eine gemischte Zahl, wo nähmlich ganze und zehntheilige Zahlen gegeben werden, so pflegt man sie in Claſsen einzutheilen, und zwar abgesondert, die ganzen so wohl als die gebrochenen Zahlen; und dann geschieht die Ausziehung nach den obigen Regeln. Beydes wird durch folgende Bey-

spiele erläutert. Z. B. man soll aus 7.24576 die Wurzel ausziehen; ferner aus 0.56644; dann aus 7487.441.

```
I. Beysp. 7.,24,57,60 (2.691
          4
          ---
          324
           46
          276
          ----
          4857
           529
          4761
          -----
           9660
           5381
           5381
          -----
           4279
```

```
II. 56,64,40 (0.752.
    49
    ---
     764
     145
     725
    ----
     3940
     1502
     3004
    -----
      936
```

```
III. 74,87.44,10 (84.53
     64
     ----
     1087
      166
      996
     -----
      9144
      1725
      8625
     ------
      51910
      17303
      51909
     ------
          1
```

V. AUFGABE.

72. Eine zweygliederige Wurzel aus dem Kubus ausziehen.

AUFLÖSUNG UND BEWEIS.

Da jeder Kubus aus dem Kubus des ersten Gliedes, aus dem dreyfachen Quadrate eines jeden Gliedes, multipliciret mit dem andern Gliede, und aus dem Kubus des zweyten Gliedes bestehet, wie aus der Formel $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ erhellet, so hat man die Wurzel, wenn man a und b ausziehet, dann diese vier Grösen daraus bildet, und davon subtrahiret, weil sie in dasjenige aufgelöset werden, aus dem sie zusammen gesetzt sind.

Wenn man also von der ersten Gröſse a^3 die Kubikwurzel nimmt, so erhält man a den ersten Theil der Wurzel; aus der zweyten Gröſse $3a^2b$ wird b ausgezogen, wenn es mit $3a^2$ oder dem dreyfachen Quadrate der ersten Wurzel dividiret wird. Hat man nun b gefunden, so macht man diese drey Gröſsen $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3; dann subtrahiret man sie nach und nach von der ganzen gegebenen Gröſse, und alle Glieder werden verschwinden.

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\ (a+b$

$-a^3$ . . . . der zu subtrahirende Kubus und dessen Wurzel a, welche auf die Stelle des Quotienten gesetzt wird.

0

$3a^2b$ . . . . die zweyte Gröſse.

$3a^2$ . . . . das dreyf. Quadrat der ersten Wurzel,

$-3a^2b$. . . . . . . multipliciret mit der neuen Wurzel und subtrahiret.

0

$3ab^2$ die dritte Gröſse.

$-3ab^2$ das dreyfache Quadrat der zweyten Wurzel multipliciret mit der ersten und subtrahiret.

0

b^3 die vierte Gröſse.

$-b^3$ der zu subtrahirende Kubus.

0

VI. AUFGABE.

73. Aus Zahlen die Kubik - Wurzel ausziehen.

AUFLÖSUNG.

I. Die gegebene Zahl wird in Claſsen von der Rechten zur Linken abgetheilet, jede Claſse zu drey Ziffern (die erste zur Linken kann auch eine oder zwey haben); hieraus wird man die Zahl der Wurzeln wiſsen (§. 58.)

II. Dann sieht man in der Tabelle (§. 58.) nach, ob die erste Claſse ein Kubus sey oder nicht. Ist sie einer, so schreibt man ihn darunter; ist sie keiner, so nimmt man den zunächst kleineren Kubus, und schreibet ihn unter die erste Claſse, und die Wurzel davon auf die Stelle der Quotienten.

III. Der darunter geschriebene Kubus wird von der ersten Claſse subtrahiret, und zu dem Reste die folgende Claſse gesetzt.

IV. Aus dem gefundenen Quotienten (a) wird das Quadrat gemacht, dieses mit 3 ($=3a^2$) multipliciret, und als Divisor unter die aufzulösende Zahl geschrieben, doch so, daſs unter den zwey letzten Ziffern ein leerer Platz bleibe.

V. Dann untersuchet man, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten sey; und der Quotient ist die zweyte Wurzel, welche an die Stelle des Quotienten zu stehen kommt.

VI. Mit dieser gefundenen Wurzel (b) wird der Divisor multipliciret, das Product ($3a^2b$) von der aufzulösenden Zahl subtrahiret, und zu dem Reste die vorletzte, oben übrig gebliebene, Ziffer genommen.

VII. Aus dieser zweyten Wurzel (b) wird das Quadrat (b^2) gemacht, und mit 3 und der ersten Wurzel multipliciret; dadurch entstehet das Product ($3ab^2$); dieses wird wieder subtrahiret, und zu dem Reste die letzte, oben übrig gebliebene, Ziffer gesetzt.

VIII. Aus der nähmlichen Wurzel (b) wird der Kubus (b^3) gemacht und subtrahiret. Bleibet kein Rest, so ist die gegebene Zahl ein vollkommener Kubus, und die Wurzel ist ausgezogen. Z. B. man soll aus 13824 die Wurzel ausziehen:

I.		13,824	die Theilung in Classen (24 die Wurzeln.
II.	a^3	8	der zunächst kleinere Kubus, welcher subtrahiret wird.
III.		5824	der Rest mit der folgenden Classe.
IV.	$3a^2$	12	das dreyfache Quadrat des ersten Gliedes $2\times2\times3=12$.
VI.	$3a^2b$	48	$\times$ mit dem andern Gliede $b=12\times4=48$.
		102	der Rest mit der ersten übrig geblieb. Ziffer.
VII.	$3ab^2$	96	die zweyte Wurzel $4\times4=16\times3=48$ $\times2$ (der ersten Wurzel) $=96$.
		64	der Rest mit der letzten übrigen Ziffer.
VIII.	b^3	64	der Kubus der zweyten Wurzel $4=64$.
		0	

BEWEIS.

Die Ächtheit dieses Verfahrens gründet sich auf die Anwendung der algebraischen Formel. Hat man einmahl b gefunden, so werden jene Theile, aus welchen die Kubikgröße zusammen gesetzt worden ist, nach und nach subtrahiret.

ANMERKUNG.

74. Sind mehr als zwey Classen, und bestehet folglich die Wurzel aus mehreren Ziffern, so wird die Ausarbeitung von der vierten Regel anzufangen, fortgesetzet; wobey wieder zu merken ist, daß die vorigen gefundenen

Wurzeln schon a gelten, aus denen das dreyfache Quadrat für die Division gemacht werden muſs, um b zu finden, deſsen dreyfaches Quadrat hernach mit dem ganzen a oder mit allen vorhergehenden Wurzeln multipliciret und subtrahiret wird. Auf solche Art findet man alle Wurzeln von was immer für einer Zahl.

BEYSPIEL.

	18,399,744	($\overset{ab}{26}$
a^3	8 . . .	der zunächst kleinere Kubus.
	10399 . .	der Rest mit der folgenden Claſse.
$3a^2$	12 . .	$2\times2=4\times3=12$ der Divisor. Der Quotient $6=b$.
$3a^2b$	72 . .	12×6 oder $3a^2\times b=72$.
	319 . .	der Rest mit der übrig gebliebenen Ziffer.
$3ab^2$	216 . .	$6\times6=36\times3=108\times2=216=b^2\times3\times a$.
	1039 . .	der Rest mit der letzten Ziffer.
b^3	216 . .	der Kubus der Wurzel 6.

	823744($\overset{a\ b}{264}$	der Rest mit der folgenden Claſse.
$3a^2$	2028 . . .	$26\times26=676\times3=2028$ der Divisor. Der Quotient $4=b$.
$3a^2b$	8112 . . .	$2028\times4=3a^2\times b$.
	1254 . . .	der Rest mit der übrigen Ziffer.
$3ab^2$	1248 . . .	$4\times4=16\times3=48\times26=1248=b^2\times3\times a$.
	64 . .	der Rest mit der letzten Ziffer.
b^3	64 . .	der Kubus der Wurzel 4. Und die ganze Wurzel 264.

Wenn während der Ausarbeitung eine Gröſse nicht subtrahiret werden könnte, so ist eine zu groſse Wurzel genommen worden, und muſs also eine kleinere gesetzet werden. Nach vollendeter Ausarbeitung, macht man die Probe durch Multiplicirung der Wurzel mit ihr selbst, um das Quadrat zu erhalten; dieses wird wieder mit der Wurzel multipliciret. Das Product muſs dann dem gegebenen Kubus gleich seyn.

Beyspiel.	Beyspiel.	Probe.
28,934,443 (307	438,976 (76	76
27	343	76
1934	95976	456
27	147	532
1934443	882	5776
2700	777	76
18900	756	34656
4444	216	40432
4410	216	438976
343	0	
343		
0		

ANMERKUNG.

75. Wenn nach vollendeter Ausarbeitung ein Rest bleibet, so ist der Kubus nicht vollkommen, und die wahre Wurzel läſst sich nicht finden; daher man wieder mittels der zehntheiligen Brüche die zunächst wahre ausziehen kann, wenn man zu dem Reste eine neue Claſse oder drey Nullen schreibet, wie (§. 70.) gesagt worden ist, und hiermit die Ausziehung fortsetzet. Auf solche Art wird aus 54 die Kubikwurzel ausgezogen.

Beysp. 54 (3. 77
- 27
27000
27
189
810
441
3690
343
3347000
4107
28749
47210
5439
417710
343
417367 Rest.

Probe 377
377
2639
2639
1131
142129 Quadrat.
377
994903
994903
426387
53582633 Kubus
417367 Rest.
54,000000

ANMERKUNG.

76. Bey zehntheiligen Brüchen verfährt man, wie bey ganzen Zahlen, wobey wieder zu merken ist, daſs die Anzahl der Ziffern entweder drey, oder sechs, oder neun seyn müſse, wie man abermahl, aus der Multiplication der zehntheiligen Quadrate mit ihren Wurzeln, sehen kann; z. B. das Quadrat 100 × mit der Wurzel 10, gibt den Kubus 1000, drey Nullen; das Quadrat 10000 × mit der Wurzel 100, gibt den Kubus 1000000, sechs Nullen; das Quadrat 1000000 × mit der Wurzel 1000, gibt den Kubus 1000000000, neun Nullen. Es sind also zu den gegebenen zehntheiligen Brüchen am Ende Nullen beyzusetzen, damit man eine Anzahl von drey, oder sechs, oder neun u. s. f. Ziffern habe. Sind es gemischte Zahlen, so werden so wohl die ganzen als gebrochenen, jede abgesondert, in Claſsen eingetheilet, wie vorher erinnert worden ist.

Es sey aus 0. 3758 und aus 146. 37 die Wurzel auszuziehen.

375,800(0.72	146.,370(5.2
343	125
32800	21370
147	75
294	150
340	637
84	60
2560	5770
8	8
2552 u. s. f.	5762 u. s. f.

I. ANMERKUNG.

77. Wenn wir die Formel der Potenzen oder Würden einer zweygliederigen Wurzel aufmerksamer betrachten, und das Gesetz untersuchen, nach welchem die Coefficienten so wohl, als die Exponenten wachsen und abnehmen, so finden wir, daſs sich daraus ein allgemeines Gesetz aufstellen laſse, nach welchem man die Glieder sammt ihren Coefficienten und Exponenten schreiben kann, ohne eine neue Multiplication der vorhergehenden Würden mit ihren Wurzeln vorzunehmen. So sind die Würden der Gröſse $a+b$.

I. $a+b$
II. $a^2+2ab+b^2$
III. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
IV. $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ u. s. f.

Die Anzahl der Glieder ist immer um eine Einheit gröſser, als der Exponent der Würde. Die Exponenten der Gröſse a nehmen nach der Ordnung ab, die Exponenten der Gröſse b aber wachsen. Der Coefficient des zweyten Gliedes ist dem Exponenten des ersten Gliedes gleich; die Coefficienten der übrigen Glieder sind das Product aus dem Exponenten des vorhergehenden Gliedes, welcher mit seinem Coefficienten multipliciret, und dieses mit der Anzahl der vorhergehenden Glieder dividiret. Z. B. in $(a+b)^4$ ist das erste Glied a^4; also ist der Coefficient des zweyten Gliedes 4; der Exponent der Gröſse a ist 3, und der Exponent der Gröſse b ist eine Einheit. Der Coefficient des dritten Gliedes ist der Exponent des zweyten, nähmlich 3, $\times$ mit seinem Coefficienten 4; dieses Product 12, dividiret mit der Anzahl der vorhergehenden Glieder, nähmlich mit 2, gibt den neuen Coefficienten 6; der Exponent des a ist 2, des b ebenfalls 2. Der Coefficient des vierten Gliedes ist der vorige Coefficient, multiplicirt mit seinem Exponenten, nähmlich 6×2; dieses Product 12, dividiret mit der Anzahl der vorhergehenden Glieder, nähmlich mit 3, gibt den neuen Coefficienten 4; der Exponent des a ist eine Einheit, des b aber 3. Der Coefficient des fünften Gliedes ist $4\times1=4$; dieses mit der Anzahl der vorhergehenden Glieder, nähmlich mit 4, dividiret, gibt $\frac{4}{4}=1$; a hätte den Exponenten 0, also $a^0=1$; da aber beydes nicht ausgedrückt wird, so bleibet nur das Glied b^4 allein. Es sey nun die achte Würde von $a+b$ zu machen, oder $(a+b)^8$. Man schreibet also anfangs die Gröſse a mit ihren abnehmenden Exponenten: a^8 a^7 a^6 a^5 a^4 a^3 a^2 a; und dazu setzet man, von dem zweyten Gliede anzufangen, die Gröſse b mit den wachsenden Exponenten bis zum neunten Gliede, da die Würde 8 verlanget wird:

$$a^8 \quad a^7b \quad a^6b^2 \quad a^5b^3 \quad a^4b^4 \quad a^3b^5 \quad a^2b^6 \quad ab^7 \quad b^8$$

Der Coefficient der zweyten Gröſse ist 8, $=$ dem Exponenten der ersten Gröſse. Der Coefficient der dritten Grösse ist der vorige Coefficient $8 \times$ mit dem Exponenten $7 = 56$. Dieses mit der Anzahl der vorhergehenden Glieder, nähmlich mit 2 dividiret, gibt 28. Der Coefficient der vierten Gröſse ist $=28\times6=168$, dividiret mit 3, der Anzahl der vorhergehenden Glieder $=56$. Der Coefficient der fünften $=56\times5=280$, dividiret mit $4=70$. Der Coefficient der sechsten ist $70\times4=280 : 5=56$. Der Coefficient der siebenten ist $56\times3=168 : 6=28$. Der Coefficient der achten ist $28\times2=56 : 7=2$. Der Coefficient der neunten ist $8\times1=8:8=1$. Auf solche Art erhält man die ganze Formel der achten Würde ohne eine andere Multiplication.

$$a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6 +8ab^7+b^8.$$

Wo die Exponenten der beyden Gröſsen a und b gleich sind, (welches immer bey dem mittleren Gliede geschieht, wenn die Anzahl der Glieder ungerade ist) dort ist der Coefficient der gröſste, und dann nehmen die Coefficienten auf die nähmliche Art ab, wie sie vorher zugenommen haben. Ist die Anzahl der Glieder gerade, so haben die zwey mittleren Glieder den nähmlichen gröſsten Coefficienten, und dann nehmen sie bis zum Ende in gleichem Verhältniſse ab. Es ist daher nur nöthig, die Ausarbeitung bis zu dem gröſsten Coefficienten fortzuführen, und die nähmlichen Coefficienten, die vorher waren, jedoch in verkehrter Ordnung, den letzten Gliedern vorzusetzen. So sind in dem vorigen Beyspiele die ersten drey Coefficienten 8. 28. 56. dann der gröſste 70, die letzten drey 56. 28. 8.

II. ANMERKUNG.

78. Wird nun eine Würde überhaupt und unbestimmt genommen, so heiſst m der Exponent der Würde, und das erste Glied ist a^m das zweyte $\frac{ma^{m-1}b}{1\times2}$, das dritte $\frac{m\times m-1a^{m-2}b^2}{1\times2\times3}$, das vierte $\frac{m\times m-1\times m-2a^{m-3}b^3}{1\times2\times3\times4}$ u. s. f. Das Glied a aber verschwindet, und die Fortschreitung ist zu Ende, wenn die von m zu subtrahirende Zahl der Gröſse m gleich wird; denn in diesem Falle ist $a^{m-m}=a^0=1$, welche Einheit der Coefficient des letzten Gliedes b ist.

III. ANMERKUNG.

79. Diese allgemeinen Ausdrücke dienen vorzüglich, um verschiedene Lehrsätze und Eigenschaften zu erfinden, wie dieſs noch mehr in dem folgenden Hauptstücke erkläret werden soll. So läſst sich aus dem allgemeinen Aus-

drucke des zweygliederigen Quadrates $aa+2ab+b^2$, wenn $b=1$ ist, der Schlufs ziehen: dafs das Quadrat der um eine Einheit vermehrten Wurzel = dem Quadrate der vorigen Wurzel ist, wenn man zu diesem die doppelte Wurzel und eine Einheit addiret; weil die vorige Formel in diese $aa+2a+1$ übergehet. Daher ist das Quadrat von 13 (das ist 169) = dem Quadrate von 12 (das ist 144), wenn man zu diesem das Doppelte von 12 (das ist 24) und noch dazu eine Einheit addiret; welches alles zusammen addiret $=169$ ist. Aus dem allgemeinen Ausdrucke des Kubus $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, wenn $b=1$ ist, ergibt sich, dafs der Kubus der um eine Einheit vermehrten Wurzel = dem Kubus der vorigen Wurzel ist, wenn man dazu das dreyfache Quadrat der vorigen Wurzel, nebstbey das Dreyfache der Wurzel, und eine Einheit addiret u. s. f. Eben so von den übrigen.

V. HAUPTSTÜCK.
VON DER RECHNUNG MIT WURZELGRÖSSEN.

I. ERKLÄRUNG.

80. Eine Wurzelgröfse ist diejenige, welcher das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ vorgesetzt ist, als $\sqrt{a}$; $5\sqrt[4]{a^3}$; $d\sqrt[m]{a^n}$; $\sqrt{16}$; $4\sqrt[3]{20}$ u. s. f. Die Zahl oder der Buchstab, die vor diesem Zeichen stehen, sind Wurzelcoefficienten; ist aber kein solcher Coefficient ausgedrückt, so wird immer 1 verstan-

den. Der Buchstab, oder die Zahl über dem Zeichen, ist der Exponent des Zeichens oder der Wurzel; ist auch dieser nicht ausgedrückt, so wird immer 2, oder die zweyte Würde verstanden, als: $\sqrt{a}$ ist die Wurzel der zweyten Würde von der Gröſse a. $\sqrt[m]{a^n}$ ist die Wurzel m von der Gröſse a, welche zur Würde n erhoben ist.

II. ERKLÄRUNG.

81. Gleichnahmige Gröſsen sind, wenn die Zeichen den nähmlichen Exponenten haben, und die nach dem Zeichen stehenden Buchstaben die nähmlichen sind, sollten auch die Coefficienten verschieden seyn; z. B. $m\sqrt{a}$ und $n\sqrt{a}$; $3\sqrt[m]{a}$ und $5\sqrt[m]{a}$. Ungleichnahmige Gröſsen aber sind, wenn sie verschiedene Exponenten oder verschiedene Buchstaben haben, als $\sqrt{a}$ und $\sqrt[3]{b}$; $\sqrt[m]{a}$ und $\sqrt[m]{b}$.

FOLGERUNG.

82. Durch diesen Ausdruck wollen wir also anzeigen, daſs die Wurzel aus derjenigen Gröſse gezogen werden soll, welche nach dem Wurzelzeichen stehet, oder welche auf dieses folget, und zwar diejenige Wurzel, welche von dem Exponenten des Wurzelzeichens angezeiget wird. Ist die Gröſse eine wahre Würde, und hat sie also eine wahre Wurzel, so kann die Wurzel selbst statt der Gröſse gesetzet werden, als $\sqrt{16}=4$; $\sqrt[3]{64}=4$; $\sqrt{a^2}=a$ u. s. f. Läſst sich die Wurzel nicht ausziehen, und ist sie also eine taube Wurzel (§. 59.), so heiſst sie eine *Irrational-Gröſse*, als $\sqrt[3]{30}$; $\sqrt{a}$ u. s. f. und von dieser letzteren ist hier eigentlich die Rede.

ANMERKUNG.

83. Wer sich an dasjenige erinnert, was wir oben (§. 61.) von der Ausziehung der Wurzel vorgetragen haben, der wird leicht begreifen, was wir nun von den Behandlungen dieser Gröſsen sagen werden; denn wenn wir den Exponenten der Gröſse oder der nach dem Zeichen stehenden Würde, mit dem Exponenten der Wurzel dividiren, so wird die Wurzel ausgezogen; folglich wird durch Weglaſsung des Zeichens der gebrochene Exponent zur Gröſse gesetzt. Z. B. wenn aus a^2 die Kubikwurzel auszuziehen wäre, so müſste man schreiben $\sqrt[3]{a^2}$, welches nach geschehener Ausziehung in $a^{\frac{2}{3}}$ verändert wird.

I. AUFGABE.

84. Das Wurzelzeichen wegschaffen.

AUFLÖSUNG.

Man dividiret den Exponenten der Würde mit dem Exponenten der Wurzel, oder man schreibet den Exponenten der Wurzel, als Nenner, unter den Exponenten der nach dem Zeichen stehenden Würde, welcher der Zähler seyn wird, und machet den Quotienten oder diesen Bruch zum Exponenten der Würde mit Weglaſsung des Wurzelzeichens.

Beysp. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

BEWEIS.

Die Wurzel wird ausgezogen, wenn man den Exponenten der Würde mit dem Exponenten der Wurzel dividiret (§. 60.); diese Division aber stellet der gebrochene Exponent vor; also ist, bey Erscheinung dieses Bruches, die Wurzel ausgezogen, und das Wurzelzeichen ist weggeschafft.

FOLGERUNG.

85. Ist die Gröſse eine wahre Würde, so schreibet man geradehin die Wurzel, ohne das Zeichen, wie wir oben gesagt haben; ist sie keine wahre, so schreibet man die Gröſse mit dem gebrochenen Exponenten. Ist sie eine bloſs eingebildete, oder unmögliche, widersinnige Gröſse, z. B. die Wurzel des verneinten Quadrates $\sqrt{-a^2}$, so wird auch die Reduction oder Ausziehung unmöglich oder nur eingebildet seyn.

II. AUFGABE.

86. Die Würde des gebrochenen Exponenten durch das Wurzelzeichen darstellen.

AUFLÖSUNG.

Der Nenner wird der Exponent des Wurzelzeichens, und der Zähler bleibet der Exponent der Würde.

Beysp. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

$a^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{a^4}$

BEWEIS.

Der Nenner stellet die Wurzel, und der Zähler die Würde, vermöge des vorhergehenden Beweises, dar; also kann die nähmliche Wurzel, welche der Nenner darstellet, der durch den Zähler dargestellten Würde vorgesetzt werden, indem beyde Ausdrücke anzeigen, daſs die Wurzel ausgezogen werden soll.

III. AUFGABE.

87. Den Exponenten einer Wurzel-

größe verändern, ohne daß der Werth der ganzen Größe verändert wird.

AUFLÖSUNG.

Man multipliciret mit der nähmlichen Größe so wohl den Exponenten der Wurzel, als auch den Exponenten der nach dem Zeichen stehenden Würde; so werden die Exponenten, ohne Veränderung des Werthes, verändert seyn.

Beysp. $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3\times 2]{a^{2\times 2}} = \sqrt[6]{a^4}$.

$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m\times c]{a^{n\times c}} = \sqrt[mc]{a^{nc}}$.

BEWEIS.

Der Werth eines Bruches wird nicht verändert, wenn man so wohl den Zähler, als den Nenner mit der nähmlichen Größe multipliciret (§. 88. Arithm.); nun aber kann der Exponent der Wurzel, als Nenner, und der Exponent der Würde, als Zähler betrachtet werden (§. 84); also wird, ohne Veränderung des Werthes, der Exponent verändert, wenn man beyde mit der nähmlichen Größe multipliciret.

FOLGERUNG.

88. Eben daßelbe ist auch von der Division mit der nähmlichen Größe zu verstehen, wie bey den Brüchen gesagt worden ist. Z. B. $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$; denn $\sqrt[\frac{6}{2}]{a^{\frac{4}{2}}} = \sqrt[3]{a^2}$.

IV. AUFGABE.

89. Wurzelgrößen von verschiedenen Exponenten zu dem nähmlichen Exponenten reduciren.

AUFLÖSUNG.

Man schaft das Wurzelzeichen weg, und stellet die Exponenten als Brüche vor (§. 84.); diese Brüche reduciret man zu einem gemeinschaftlichen Nenner (§. 97. Arithm.); hierauf machet man den Nenner eines jeden Bruches wieder zum Exponenten des Wurzelzeichens (§. 86.) und so werden die Wurzelgröſsen den nähmlichen Exponenten haben.

Beysp. $\sqrt[m]{a^n}$ und $\sqrt[p]{b^q}$ ist $a^{\frac{n}{m}}$ und $b^{\frac{q}{p}}$

$a^{\frac{np}{mp}}$ und $b^{\frac{mq}{mp}}$; also $\sqrt[mp]{a^{np}}$ und $\sqrt[mp]{b^{mq}}$.

$\sqrt[6]{a^3}$ und $\sqrt[5]{b^2}$ ist $a^{\frac{3}{6}}$ und $b^{\frac{2}{5}}$

$a^{\frac{15}{30}}$ und $b^{\frac{12}{30}}$; also $\sqrt[30]{a^{15}}$ und $\sqrt[30.]{b^{12}}$.

BEWEIS.

Dieser hängt von den in der Auflösung angeführten Paragraphen ab, denen die einzelnen Beweise, die hier zusammen genommen werden, beygesetzt sind.

I. ANMERKUNG.

90. Wenn der Exponent entweder bey dem Zeichen, oder bey der Würde nicht ausgedrückt ist, so wird, wie wir schon gesagt haben, bey der Würde eine Einheit, und bey dem Zeichen ein Zweyer verstanden, welches beydes bey diesen Aufgaben nothwendig ausgedrückt werden muſs.

Beysp. $\sqrt{a^3}$ und $\sqrt[5]{b}$ ist $a^{\frac{3}{2}}$ und $b^{\frac{1}{5}}$

$a^{\frac{15}{10}}$ und $b^{\frac{2}{10}}$; also $\sqrt[10]{a^{15}}$ und $\sqrt[10]{b^2}$.

Werden nun wieder die Wurzelzeichen weggeschafft, und die Brüche zu den kleinsten Gliedern reduciret, so erscheinen die gegebenen Gröſsen, welches als Probe bey jeder Ausarbeitung dienen kann.

Beysp. $\sqrt[10]{a^{15}}$ und $\sqrt[10]{b^2}$ ist $a^{\frac{15}{10}}$ und $b^{\frac{2}{10}} = a^{\frac{3}{2}}$ und $b^{\frac{1}{5}}$

$\sqrt{a^3}$ und $\sqrt[5]{b}$.

V. AUFGABE.

91. Den Coefficienten einer Wurzelgröſse, ohne Veränderung des Werthes, nach dem Wurzelzeichen setzen.

AUFLÖSUNG.

Der Coefficient wird zur Würde, welche der Exponent der Wurzelgröſse anzeiget, erhoben, dann mit der nach dem Zeichen stehenden Grösse multipliciret, und das Product nach dem Zeichen gesetzt.

$$a\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{a^3 b^2}\text{; ferner } 3\sqrt{8} = \sqrt{9 \times 8} = \sqrt{72}.$$

BEWEIS.

Das Wurzelzeichen zeiget an, daſs aus der nach dem Zeichen gesetzten Gröſse diejenige Wurzel auszuziehen sey, welche der Exponent des Zeichens darstellet; wenn man also wieder aus der Würde des Coefficienten die Wurzel der nähmlichen Würde ausziehet, so wird der Werth des Coefficienten nicht verändert; folglich ist die Auflösung richtig gemacht.

VI. AUFGABE.

92. Wurzelgröſsen zu kleineren Ausdrücken reduciren.

AUFLÖSUNG.

Die Würde wird in die Factoren aufgelöset, und wenn sich aus einem derselben die Wurzel ausziehen läſst, so wird diese als Coefficient dem Wurzelzeichen vorgesetzet.

$$\sqrt[m]{a^n b^m} = \sqrt[m]{a^n \times b^m} = b\sqrt[m]{a^n}$$
$$\sqrt[3]{a^2 b^3} = \sqrt[3]{a^2 \times b^3} = b\sqrt[3]{a^2}$$
$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$$
$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \times 4} = 2\sqrt[3]{4}.$$

BEWEIS.

Dieser hänget von der vorhergehenden Aufgabe ab; denn auf welche Art eine Gröſse zusammen gesetzt wird, auf eben dieselbe wird sie wieder aufgelöset.

VII. AUFGABE.

93. Gröſsen, welche mehrere Wurzel-Zeichen haben, zu einer einzigen reduciren.

AUFLÖSUNG.

Die vor dem Zeichen stehende Gröſse wird nach demselben gesetzt, und die Exponenten der Zeichen werden mit einander multipliciret.

$\sqrt[m]{\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}\sqrt[r]{\frac{e}{f}}}}$ man machet zuerst $\sqrt[m]{\frac{a}{b}\sqrt[nr]{\frac{c^r e}{d^r f}}}$ $= \sqrt[mnr]{\frac{a^{nr} c^r e}{b^{nr} d^r f}}$. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt[4]{4 \times 2}} = \sqrt[8]{16 \times 4 \times 2} = \sqrt[8]{128}$.

Durch entgegen gesetztes oder verkehrtes Verfahren wird die Wurzelgröſse zu dem einfachesten Ausdrucke reduciret.

$$\sqrt[18]{73728} = \sqrt[18]{4096 \times 9 \times 2} = \sqrt[9]{64 \times 3\sqrt{2}} = \sqrt[3]{4\sqrt[3]{3\sqrt{2}}}.$$

94. Wurzelgröſsen addiren und subtrahiren.

AUFLÖSUNG.

Sind die Gröſsen ungleichnahmig, so wird dieses Geschäft bloſs durch Zeichen angezeiget; sind sie aber gleichnahmig, so werden die Coefficienten, nach den in der Algebra (§. 14. u. f.) vorgetragenen Regeln, addiret, oder subtrahiret, oder reduciret.

BEWEIS.

Ungleichnahmige Gröſsen können in ein Glied nicht vereiniget, sondern müſsen vorher, wenn es sich thun läſst, zu gleichnahmigen gemacht werden; nun aber erstreckt sich bey gleichnahmigen algebraischen Gröſsen die Addition, und Subtraction, oder Reduction bloſs auf die Zeichen und Coefficienten, wie es in den angeführten §§. bewiesen worden ist; also werden auf diese Art die Wurzelgröſsen addiret und subtrahiret.

Beysp. $a\sqrt{c}$ und $b\sqrt{d}$ wird $a\sqrt{c}+b\sqrt{d}$. $a\sqrt{c}+b\sqrt{c}$ wird bey der Addition $(a+b)\sqrt{c}$, oder bey der Subtraction $(a-b)\sqrt{c}$.

FOLGERUNG.

95. Sind Würden von Zahlen vorhanden, so muſs man sehen, ob sie, nach der VII. Aufgabe, zu einem kleineren und gleichen Ausdrucke zweyer Glieder reduciret werden können; widrigen Falls läſst sich keine Veränderung damit vornehmen, sondern sie können bloſs durch Zeichen dargestellet werden.

Beysp. $\sqrt{8}$ und $\sqrt{18}$ wird $\sqrt{4\times 2}$ und $\sqrt{9\times 2}$ oder $2\sqrt{2}$ und $3\sqrt{2}$. Addiret man die Coefficienten, so wird $5\sqrt{2}$. Nach der V. Aufgabe macht man wieder $\sqrt{25\times 2}=\sqrt{50}$.

IX. AUFGABE.

96. Wurzelgröſsen multipliciren.

AUFLÖSUNG.

Man reduciret sie zu einem gemeinschaftlichen Nenner oder Exponenten der Wurzel, wenn sie diesen nicht ohne dieſs schon haben; dann multipliciret man die Coefficienten mit einander, und das Product ist der neue Coefficient. Hierauf multipliciret man die nach dem Zeichen stehenden Gröſsen mit einander, und das Product ist die neue Gröſse, welche nach dem nähmlichen oder vorigen Zeichen zu stehen kommt.

Beysp. $\sqrt{a}\times d=d\sqrt{a}$. $a\sqrt[3]{b}\times c\sqrt[3]{d}=ac\sqrt[3]{bd}$

$$3\sqrt{a}\times 4\sqrt{b^3}=12\sqrt{ab^3}$$

$$\tfrac{4}{5}\sqrt[3]{a^2c}\times\tfrac{3}{8}\sqrt[3]{ac^4}=\tfrac{12}{40}\sqrt[3]{a^3c^5}$$

$$\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}\times\frac{e}{f}\sqrt[n]{\frac{g}{h}}=\frac{a}{b}\sqrt[mn]{\frac{c^n}{d^n}}\times\frac{e}{f}\sqrt[mn]{\frac{g^m}{h^m}}$$

$$=\frac{ae}{bf}\sqrt[mn]{\frac{c^n g^m}{d^n h^m}}.$$

$$\begin{array}{l}
\sqrt{3}-4\sqrt{2} \text{ multipliciret mit}\\
\sqrt{3}-5\sqrt{2}\\
\hline
\sqrt{9}-4\sqrt{6}\\
\qquad -5\sqrt{6}+20\sqrt{4}\\
\hline
\sqrt{9}-9\sqrt{6}+20\sqrt{4}=3-9\sqrt{6}+40.
\end{array}$$

$$2\sqrt{5}\times 3\sqrt[3]{2}=2\sqrt[6]{125}\times 3\sqrt[6]{4}=6\sqrt[6]{500}.$$

X. AUFGABE.

97. Wurzelgrößen dividiren.

AUFLÖSUNG.

Zuerst reduciret man sie zu dem nähmlichen Exponenten, wenn sie aus verschiedenen bestehen; dann dividiret man die Coefficienten und der Quotient ist der neue Coefficient; hierauf dividiret man die nach dem Zeichen stehenden Grössen, und der Quotient ist die neue Grösse, welche nach dem nähmlichen Zeichen gesetzt wird.

Beysp. $a\sqrt[3]{b} : c\sqrt[3]{d} = \frac{a}{c}\sqrt[3]{\frac{b}{d}}$

$4\sqrt{a} : 2\sqrt{a} = 2$

$8\sqrt{32} : 4\sqrt{8} = 2\sqrt{4} = 2 \times 2 = 4.$

XI. AUFGABE.

98. Eine Wurzelgröße zu was immer für einer Würde erheben, oder was immer für eine Wurzel ausziehen.

AUFLÖSUNG.

Man multipliciret den Exponenten der nach dem Zeichen stehenden Größe mit der verlangten Würde, oder bey der Ausziehung der Wurzel dividiret man den Exponenten der nach dem Zeichen stehenden Würde mit der verlangten Wurzel.

Beysp. Es soll $\sqrt[5]{a}$ zur vierten Würde erhoben werden; man machet also $\sqrt[5]{a^4}$. Ferner $\sqrt{abc}$ soll zur dritten Würde erhoben werden; also wird $\sqrt{a^3b^3c^3}$ oder $(\sqrt{abc})^3$.

FOLGERUNG.

99. Die Beweise dieser Auflösungen sind von denje-

nigen nicht unterschieden, die schon oben (§. 25 und folg.) vorgetragen wurden.

ANMERKUNG.

100. Will man, nach der ersten Aufgabe, die Wurzelgröſse immer weggeschafft haben, so wird die ganze Rechnung zur Exponenten-Rechnung reduciret, wovon in dem 44. und den folg. §§. gehandelt worden ist. Daher kann man gemeiniglich die ganze Rechnung der Wurzelgröſsen entbehren.

VI. HAUPTSTÜCK.

VON DEN GLEICHUNGEN ODER ÄQUATIONEN.

I. ERKLÄRUNG.

101. Die *Gleichung* (Aequatio) bestehet in der Zusammenhaltung zweyer Gröſsen von gleichem Werthe; sie wird durch das Gleichheitzeichen $=$ ausgedrücket; z. B. wenn wir anzeigen wollen, daſs die Gröſse a den nähmlichen Werth habe, als die Gröſse b, so schreiben wir $a=b$; $x=\frac{ab}{c}$ bedeutet, daſs die Gröſse x eben so viel gelte, als a multipliciret mit b, und dividiret mit c. Z. B. 2 Gulden $=$ 40 Groschen; 6 Groschen $=$ 18 Kreuzern.

FOLGERUNG.

102. Hieraus folget, daſs man bey jeder Gleichung zwey Theile oder Glieder betrachten müſse, eines vor dem

Zeichen, das andere nach dem Zeichen der Gleichheit; jenes heifst das erste Glied, oder der erste Theil; dieses das zweyte Glied, oder der zweyte Theil der Gleichung.

I. ANMERKUNG.

103. Hier hat man wohl Acht zu haben, dafs die Wörter *das nähmliche*, *gleich*, *ähnlich* nicht mit einander vermenget werden. *Das nähmliche* im strengen und abstracten Verstande wird für *eines* genommen, welches alle Verschiedenheit oder Mehrheit ausschliefset. So kann der nähmliche, welcher der Peter ist, nicht zugleich der Paul seyn; und in dieser Betrachtung wird *das nähmliche* für eben dasselbe genommen. *Gleich* nennen wir, was in allen seinen Eigenschaften und Bestimmungen mit dem andern überein kommt, und daher auch ohne Veränderung an die Stelle des andern gesetzt werden kann; z. B. das Dreyeck *A* ist dem Dreyecke *B* gleich, wenn alle drey Seiten und drey Winkel des einen, so wohl in der Länge als in der Gröfse, den Seiten und Winkeln des andern gleich kommen; daher kann eines an die Stelle des andern gesetzt werden, und beyde heifsen der Sache nach, das nähmliche oder *eines*, der Zahl nach aber *zwey*. *Ähnliche* Dinge sind, welche in ihren Eigenschaften und Bestimmungen, nur die Grösse ausgenommen, übereinkommen; so ist das Dreyeck *A* dem Dreyecke *B* ähnlich, wenn die Winhel des einen so grofs als die Winkel des anderen, die Seiten aber verschieden sind. Im gemeinen Reden pflegt man die Ausdrücke *das nähmliche* und *gleich* nicht zu unterscheiden. Bey Gleichungen, wo blofs von dem Werthe die Rede ist, heifsen zwey Gröfsen gleich, wenn sie eben denselben, das ist, gleichen Werth haben. Z. B. 3 Gulden = 180 Kreuzern.

II. ANMERKUNG.

104. Der Gegenstand der Gleichungen ist, den Werth einer oder mehrerer unbekannter Gröfsen finden, welches aber unmöglich ist, wenn blofs unbekannte Gröfsen ohne

bekannte gegeben werden, wie $x=y$; sondern es müſsen immer bekannte Gröſsen darunter gemischet seyn, mit denen die unbekannten in einem Verhältniſse stehen; wie $3x=18$, das heiſst: wenn die unbekannte Gröſse mit 3 multipliciret wird, so kann sie mit 18 ausgeglichen werden; ferner $\frac{3y}{5}=6$ bedeutet, daſs die unbekannte Gröſse y, wenn sie mit 3 multipliciret, und das Product mit 5 dividiret wird, mit 6 ausgeglichen ist. Hieraus entspringen folgende Erklärungen.

II. ERKLÄRUNG.

105. Die Aufgabe einer Gleichung ist die Frage nach dem zu findenden Werthe irgend einer Gröſse, welche mit dem bekannten Werthe einer andern Gröſse ausgeglichen werden kann. Die Auflösung der Aufgabe bestehet in dem Ausdrucke selbst der unbekannten Gröſse mit einem bekannten Werthe; z. B. die Aufgabe lautet: *Eine Zahl finden, welche, wenn sie zu 56 addiret wird, eine Summe gibt, die dem Dreyfachen der gesuchten Zahl gleich ist.* Die Auflösung ist diese: $x=28$, das heiſst: die verlangte Zahl ist 28, welche, zu 56 addiret, das Dreyfache der Zahl 28 machet, oder $28+56=28\times3$, beydes ist $=84$.

III. ERKLÄRUNG.

106. Bedingungen der Aufgabe heiſsen die Verhältniſse der unbekannten Gröſsen zu den bekannten, welche letztere zur Auflösung der Aufgabe unumgänglich nothwendig sind. Diese Bedingungen werden entweder mit Ziffern oder mit den ersten Buchstaben des Alphabets ausgedrückt. Z. B. Peter machet täglich 10 Meilen Weges, und reiset bereits 5 Tage; Paul machet täglich eine Reise von 15 Meilen, wann wird er den ersteren einhohlen? Man suchet hier die Zeit, da beyde zusammen treffen x; die Be-

dingungen sind die Tage und Meilen des Peter mit den Meilen des Paul. Die vom Peter schon zurück gelegte Reise ist $10 \times 5 = 50$ Meilen; nun hat er noch zu machen $10 \times x$; welches beydes zusammen genommen der Reise des Paul $15 \times x$ gleich seyn muſs, das ist, $50 + 10x = 15x$. Man kann auch die Meilen des Peter a, die Tage der Reise c, die Meilen des Paul b nennen, und dann stehet die Gleichung $ac + ax = bx$. Wird diese Aufgabe in Ziffern aufgelöset, so hat man $x = 10$; in Buchstaben $\frac{ac}{b-a} = x$, oder $\frac{50}{15-10} = 10$, der nähmliche Werth der Frage der Zusammenkunft.

IV. ERKLÄRUNG.

107. Eine *bestimmte* Aufgabe ist, wenn nur eine, und zwar eine bestimmte Auflösung der gestellten Frage gegeben wird. So ist in dem vorigen Falle die verlangte Zahl allein und bestimmt 10. Dergleichen Aufgaben sind diejenigen, wo eben so viel Gleichungen vorkommen, als unbekannte Gröſsen. Ist nur eine unbekannte Grösse, so muſs auch nur eine Gleichung vorhanden seyn; sind zwey unbekannte Gröſsen, also auch zwey Gleichungen; sind drey unbekannte, so müſsen auch drey Gleichungen vorkommen. Eine *unbestimmte* Aufgabe ist, wenn die gestellte Frage mehrere Auflösungen zuläſst, und in mehreren Zahlen befriediget werden kann; z. B. wenn man zwey Zahlen suchet, welche zusammen die Summe 8 ausmachen; dann werden diese zwey Zahlen entweder 7 und 1, oder 6 und 2, oder 5 und 3, oder 4 und 4 seyn. Dieſs ereignet sich jedes Mahl, so oft wenigere Gleichungen, als unbekannte Gröſsen, gegeben werden; wie in dem vorigen Beyspiele nur eine Gleichung gegeben

wird, und zwey unbekannte Gröſsen $x+y=8$; würde eine zweyte Gleichung hinzu gegeben, daſs das Product beyder Zahlen 12 seyn sollte, so wäre die Aufgabe bestimmt, und würde nur mit zwey Zahlen 6 und 2 aufgelöset. *Mehr als bestimmt* ist die Aufgabe, wenn mehr Bedingungen vorhanden sind, als unbekannte Gröſsen, welche Bedingungen entweder überflüſsig sind, und daher wegbleiben können, oder sie enthalten einen Widerspruch, und machen also die Auflösung unmöglich. Würde in dem vorigen Falle die dritte Bedingung hinzu gesetzt, und der Unterschied der Zahlen sollte 4 seyn, also $x-y=4$, so sind die nähmlichen Zahlen hinreichend. Wäre die dritte Bedingung diese, daſs der Unterschied 2 seyn sollte, so würde die Auflösung unmöglich seyn; denn dergleichen Zahlen, welche diese drey Bedingungen hätten, gibt es nicht.

V. ERKLÄRUNG.

108. Eine Gleichung des ersten Grades ist, wenn die unbekannte Gröſse von der ersten Würde ist: $x+\frac{1}{2}x=a$. Eine Gleichung eines höheren Grades ist, wenn die unbekannte Gröſse zu irgend einer Würde erhoben ist, und zwar insbesondere des zweyten Grades, wenn die unbekannte Gröſse ein Quadrat ist, welche daher auch *Quadratgröſse* genannt wird; eine Gleichung des dritten Grades ist, wenn die unbekannte Gröſse ein Kubus ist u. s. f. Z. B. $x^2-x=a$. Sind mehrere unbekannte Gröſsen, so erhalten sie ihre Benennung von der höchsten Summe, welche aus den Exponenten der unbekannten Gröſsen in einem Gliede bestehen kann. So ist $xy-y=b$ des zweyten Grades, weil die Summe der Exponenten in $x^1y^1=2$ ist.

ANMERKUNG.

109. Wenn also irgend eine Frage gestellet wird, so muſs man sie in die algebraische Sprache gleichsam übersetzen. Die unbekannten Gröſsen sind von den bekannten wohl zu unterscheiden; die unbekannten werden mit den letzten Buchstaben des Alphabetes x, y, z, die bekannten aber mit den ersten Buchstaben a, b, c oder mit angemessenen Ziffern ausgedrückt. Auch muſs man genau darauf sehen, daſs die Anzahl der unbekannten Gröſsen nicht ohne Noth vermehret werde. Wenn z. B. eine Zahl verlanget wird, und davon das Doppelte, Dreyfache oder die Hälfte gemacht werden soll, so sey die unbekannte Zahl x, das Doppelte $2x$, das Dreyfache $3x$, die Hälfte $\frac{1}{2}x$ oder $\frac{x}{2}$. Werden zwey Zahlen verlangt, wovon der Unterschied 20, oder die Summe 30 seyn soll, so hat man nicht nöthig, diese Zahlen x und y zu nennen; sondern man setzet die kleinere $=x$, dann ist die gröſsere $30-x$, oder man setzet die gröſsere $=x$, dann ist die kleinere $30-x$, welches auch damahls bisweilen Statt findet, wenn die Aufgabe drey unbekannte Gröſsen in sich zu enthalten scheinet, wie unten in dem I. Beyspiele. Hierauf sind die Bedingungen gehörig und mit ihren Zeichen beyzusetzen; ist die Rede von Gewinn, Vermehrung, oder Summe, so machet man das Zeichen $+$; ist aber die Rede von Schaden, Unterschied oder Verminderung, so brauchet man das Zeichen $-$. Werden vielfache Gröſsen verlanget, so setzet man den Coefficienten zu der unbekannten Gröſse; werden Theile gegeben, so schreibet man die Zahl der Theile unter x oder y in Gestalt eines Bruches. Endlich unterscheidet man von diesem dasjenige, welches mit dem andern ausgeglichen werden kann, durch das Zeichen der Gleichheit $=$, und sondert dadurch die Gleichung in ihre gehörigen zwey Theile ab.

VI. ERKLÄRUNG.

110. Die Bedingungen, welche die unbe-

kannte Gröſse mit sich führet, sind mit derselben entweder durch die Addition verknüpfet, wenn sie das Zeichen $+$ haben, wie $x+20=30$; oder durch die Subtraction, wenn sie das Zeichen $-$ haben, wie $x-10=20$; oder durch die Multiplication, wenn sie mit der unbekannten Gröſse, als Coefficient verbunden werden, wie $3x=30$; oder durch die Division, wenn sie in Gestalt eines Bruches als Nenner unter die unbekannte Grösse gesetzt werden, wie $\frac{x}{3}=30$ oder $\frac{1}{3}x=30$.

HAUPTGRUNDSATZ.

111. Zwey gleiche Gröſsen bleiben gleich, wenn man zu ihnen gleiche Gröſsen addiret, oder von ihnen gleiche Gröſsen subtrahiret; wenn man sie mit gleichen Gröſsen multipliciret oder dividiret; wenn man sie zu gleichen Würden erhebet, oder eine gleiche Wurzel ausziehet; oder wenn man die Zeichen von beyden Gröſsen gleich verändert.

BEWEIS.

Dieses ist aus den voraus geschickten Grundsätzen (§. 20.) bekannt, und das letztere ergibt sich von selbst. Denn ist $+a=+b$, so ist auch $-a=-b$. Ist $8-3=12-7$, so ist auch $-8+3=-12+7$. Denn die Zeichen gehen keineswegs die Gröſse, sondern bloſs die Behandlung an; daher geschieht auch in Ansehung der Gleichheit keine Veränderung, sondern eine gleiche Gröſse gehet aus einer zu addirenden in eine zu subtrahirende über, oder umgekehrt. Hieraus folget der

LEHRSATZ.

112. Bekannte Gröſsen, sie mögen, auf

was immer für eine Art, einer unbekannten Gröſse anhängen, können von dieser durch entgegengesetztes Verfahren getrennet, und zu dem andern Theile der Gleichung übertragen werden; z. B. aus $\frac{2x}{3}+20-30=100$ kann man machen $x=\left(\frac{100+30-20}{2}\right)3$.

BEWEIS.

Aus dem Hauptgrundsatze erhellet, daſs die Gleichheit der Gröſsen nicht verändert wird, wenn in beyden Gröſsen die nähmliche Veränderung vorgehet, durch was immer für eine Behandlungsart dieses auch geschehen mag. Wenn man nun durch das Zeichen — auf beyden Seiten die gegebene bejahende Gröſse subtrahiret, und durch die Addition mit dem Zeichen + die verneinte Gröſse setzet, so wird auf derjenigen Seite, wo die Gröſse schon stehet, diese ausgestrichen, weil die nähmliche Gröſse mit entgegengesetzten Zeichen vorkommt; auf der anderen Seite aber wird sie gesetzet; wenn man beyde Gröſsen mit dem Coefficienten der unbekannten Gröſse dividiret, oder beyde mit dem Nenner der unbekannten Gröſse multipliciret, so werden auf der einen Seite eben derselbe Multiplicator und Divisor weggestrichen, auf der anderen Seite aber müſsen sie ausgedrückt werden; also ist es gleichviel, wenn man, ohne irgend eine andere Veränderung vorzunehmen, die Gröſse auf die andere Seite durch entgegengesetztes Verfahren überträgt. Z. B. aus $\frac{2x}{3}+20-30=100$;

wenn man 20 subtrahiret, und 30 addiret, wird $\frac{2x}{3}+20-20-30+30=100-20+30$, das ist, wenn man in dem ersten Theile $+20$ und -20, dann -30 und $+30$ wegstreichet, so hat man $\frac{2x}{3}=100+30-20$. Ferner aus $\frac{2x}{3}=100+30-20$, wenn man beyde Glieder mit 3 multipliciret, so hat man $\frac{2x\times3}{3}=(100+30-20)\,3$; nun aber ist $\frac{2x\times3}{3}=2x$; also ist $2x=(100+30-20)3$. Wenn man endlich alles mit 2 dividiret, so wird $\frac{2x}{2}=\left(\frac{100+30-20}{2}\right)3$, das ist, $x=\left(\frac{100+30-20}{2}\right)3$.

Das nähmliche also wird bewirkt, wenn man gleich ohne eine andere Verfahrungsart $+20$ mit dem Zeichen $-$, und -30 mit dem Zeichen $+$, den Coefficienten 2 als Divisor, und den Nenner oder Divisor 3 als Multiplicator auf die andere Seite überträgt.

FOLGERUNG.

113. Hieraus sieht man die Methode, wie man jede verneinte Gröſse in eine bejahete, oder umgekehrt, verwandeln könne. Denn es wird nur erfordert, daſs man sie auf die andere Seite übertrage, und eben darum muſs ihr auch das entgegengesetzte Zeichen vorstehen. Z. B. aus $20x-100=10-3x$ wird $20x+3x=100+10$. Aus $a-c=bx-y^2$ wird $y^2=bx+c-a$.

I. AUFGABE.

114. Die Gleichung einer einzigen unbekannten Gröſse auflösen.

AUFLÖSUNG.

Reg. Man befreyet die unbekannte Gröſse von allen bekannten Gröſsen mittels der Übertragung (§. 111.) und dann wird man den Werth der unbekannten Gröſse haben. So wird in der vorigen Aufgabe $\frac{2x}{3}+20-30=100$ der Werth der Gröſse x gefunden, wenn man alle anhängenden Gröſsen durch entgegengesetztes Verfahren auf den anderen Theil überträgt, nähmlich $x=\left(\frac{100-20+30}{2}\right)3$, das ist $x=165$.

BEWEIS.

Die Auflösung der Aufgabe ist der Ausdruck der unbekannten Gröſse mit dem bekannten Werthe; nun aber wird nach der vorerwähnten Regel die unbekannte Gröſse mit dem bekannten Werthe ausgedrückt; denn man hat den Ausdruck: x gilt 165; also ist die Aufgabe gelöset.

ANMERKUNG.

115. Damit aber bey der Übertragung selbst keine Verwirrung entstehe, kann man folgende Ordnung beobachten:

I. Man überträgt anfangs die bekannten Gröſsen mit dem Zeichen $+$ oder $-$, daſs also die unbekannte Grösse, ein Mahl oder öfter gesetzet, mit ihren Coefficienten oder Divisoren ganz allein auf einer Seite stehe.

II. Dann werden die unbekannten Gröſsen in eine einzige gesammelt; dieſs geschieht mittels der Addition oder Subtraction der Coefficienten, wenn sie ganze Zahlen sind; sind sie aber Brüche, so werden sie zuerst zu einem gemeinschaftlichen Nenner reduciret, und hernach in eine einzige

Gröſse susammen gebracht, je nachdem es die Zeichen erfordern.

III. Sind auf beyden Seiten unbekannte Gröſsen, so werden sie auf eine Seite übertragen, doch so, daſs diejenige, welche einen gröſseren Coefficienten hat, alsdann das Zeichen $+$ erhalte, damit der Werth nicht verneinend ausfalle.

IV. Der Nenner des unbekannten Bruches, oder der Divisor wird mittels der Multiplication, und endlich der Coefficient mittels der Division übertragen; und nun wird die unbekannte Gröſse allein stehen bleiben.

V. Ist die unbekannte Gröſse der Nenner eines Bruches, so muſs sie gleich anfangs mittels der Multiplication auf die andere Seite übertragen weden, z. B. $\frac{2}{x} = 6$ wird $2 = 6x$; und $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3} = x$.

I. *Beysp.* Drey gewinnen zusammen 180 Gulden. Der zweyte gewinnet um 8 mehr, als der erste; der dritte so viel, als die beyden ersteren zusammen. Der Gewinn des ersten ist also $= x$; des zweyten $x + 8$; des dritten $x + x + 8$; alle drey zusammen gewinnen 180; also hat man diese Gleichung:

$$x + x + 8 + x + x + 8 = 180.$$

Nach der ersten Beobactung $x + x + x + x = 180 - 8 - 8 = 180 - 16 = 164$.

Nach der zweyten $4x = 164$.

Nach der vierten $x = \frac{164}{4} = 41$.

Der erste hat also gewonnen.	41
Der zweyte um 8 mehr	49
Der dritte die Summe von beyden	90
	180

II. *Beysp.* Peter hat von seinem Gelde am ersten Tage ein Drittheil, am zweyten ein Viertheil, am dritten Tage ein Fünftheil ausgegeben, und es bleiben ihm noch

26 Gulden übrig. Es fragt sich, wie viel er anfangs gehabt habe?

Erste Summe $= x$

Ausgaben $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{4}$, und $\frac{x}{5}$

Rest $= 26$

Gleichung $x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 26.$

II. Reg. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{60x - 20x - 15x - 12x}{60} = 26 \\ \frac{60x - 47x}{60} = 26 \\ \frac{13x}{60} = 26 \end{array} \right.$

IV. Reg. $\left\{ \begin{array}{l} 13x = 26 \times 60 = 1560 \\ x = \frac{1560}{13} = 120 = \text{der ersten Summe} \end{array} \right.$

das ist, $120 - 40 - 30 - 24 = 26.$

III. *Beysp.* Ein Vater ward um das Alter seiner sechs Söhne befragt, worauf er zur Antwort gab: jeder ist um vier Jahre älter als der nachfolgende, und der älteste ist drey Mahl so alt, als der jüngste.

Das Alter des jüngsten oder VI. $= x$

des V. $= x + 4$

des IV. $= x + 8$

des III. $= x + 12$

des II. $= x + 16$

des I. $= x + 20$

Das Alter des Erstgebornen $x + 20$ muſs zugleich das Dreyfache von dem Alter des Jüngsten seyn; also ist die Gleichung: $x + 20 = 3x$

III. Reg. $20 = 3x - x$ das ist $20 = 2x$

IV. Reg. $\frac{20}{2} = x$ das ist $10 = x.$

Also ist das Alter des ersten $=10$

zweyten $=10+4=14$

drittten $=10+8=18$

vierten $=10+12=22$

fünften $=10+16=26$

sechsten $=10+20=30$

Nun aber ist 30 das Dreyfache von 10; also ist das Alter des Erstgebornen dem dreyfachen Alter des Jüngsten gleich.

FOLGERUNG.

116. Hieraus sieht man die Methode, nach welcher man die Richtigkeit einer Ausarbeitung prüfen kann. Man setzet nähmlich in der ersten Gleichung statt x den zuletzt gefundenen Werth. Ist nun der auf solche Art gelösete erste Theil der Gleichung dem zweyten Theile gleich, so ist die gestellte Frage befriediget, und die Aufgabe richtig gelöset, wie es sich aus diesen drey Beyspielen offenbar zeiget. Denn es ist unmöglich, daſs diese zwey Theile nach der Auflösung gleich bleiben sollen, wenn der Werth der Gröſse x, welcher wirklich in der Gleichung enthalten ist, von dem gefundenen Werthe unterschieden wäre.

IV. *Beysp.* Ein Sohn sagte zu seinem Vater, welcher bereits drey Mahl älter war, als er: Nach 20 Jahren wirst du, lieber Vater, nur zwey Mahl so alt seyn, als ich. Wie alt sind also Vater und Sohn?

Alter des Sohnes $=x$

des Vaters $=3x$

Nach 20 Jahren ist das Alter des Sohnes $=x+20$; des Vaters $=3x+20$; letzteres aber muſs das Zweyfache des ersteren ausmachen; also ist

$$3x+20=(x+20)2$$
$$3x+20=2x+40$$
$$3x-2x=40-20$$
$$x=20$$

Das Alter des Sohnes $=20$, des Vaters $=60$, das Dreyfache des ersteren.

Nach 20 Jahren ist das Alter des Sohnes $=40$, des Vaters $=80$, das Doppelte des ersteren.

V. *Beysp.* Peter und Johann hatten jeder gleichviel Geld, als sie zum Spiele kamen. Peter verlor 12 Gulden, Johann 57 Gulden; dem Peter blieb nun vier Mahl so viel übrig, als dem Johann.

Summe des Peter $=x$. Verlust des Peter $x-12$

Summe des Johann $=x$. Verlust des Johann $x-57$

und nach den Bedingungen

$$x-12=(x-57)4$$
$$x-12=4x-228$$
$$228-12=4x-x$$
$$216=3x$$
$$72=x$$

Summe des Peter $=72$. Rest des Peter $=60$

Summe des Joh. $=72$. Rest des Joh. $=15$

Nun aber ist 60 das Vierfache von 15; also ist die Auflösung richtig gemacht.

VI. *Beysp.* Ein Herr verspricht seinem Diener für 12 Monathe 80 Gulden nebst Kleidung, deren Werth sie zugleich bestimmen. Nach 7 Monathen gibt er ihm seinen Abschied, bezahlet ihm 30 Gulden, und läſst ihm zugleich das Kleid. Es fragt sich nun, was das Kleid werth sey.

Der Werth des Kleides x. Der ganze Lohn des Dieners $x+80$. Den Lohn für 7 Monathe findet man, wenn man erstens $x+80$ mit 12 dividiret; dadurch erhält man den Lohn für einen Monath, welcher, mit 7 multipliciret, den Lohn für 7 Monathe gibt, das ist, $\frac{7x+560}{12}$, welches dem bezahlten Lohne $30+x$ gleich seyn muſs.

$$\frac{7x+560}{12}=30+x$$
$$7x+560=360+12x$$
$$560-360=12x-7x$$
$$200=5x$$
$$40=x$$

Der Lohn fürs ganze Jahr 120 Gulden; für einen Monath 10 Gulden; für 7 Monathe 70 Gulden.

Nun aber betragen die ausgezahlten 30 Gulden mit den 40 Gulden am Kleide, zusammen 70 Gulden; also ist die Aufgabe gelöset.

VII. *Beysp.* Ein Kurier machet täglich 10 Meilen Weges; nach fünf Tagen folget ihm der zweyte, der täglich 15 Meilen machet; wann treffen sie zusammen?

Tag der Zusammenkunft $=x$

Die Meilen, welche der erste zurück gelegt hat, sind 50; nun sind noch zurück zu legen $10 \times x$, oder so viel Mahl 10, als noch Tage zu reisen sind. Die Meilen, welche der zweyte zu machen hat, sind $15 \times x$, oder 15, multipliciret mit den Tagen der Reise, welche Summen auf beyden Seiten gleich seyn müſsen.

$$50+10x=15x$$
$$50=15x-10x$$
$$50=5x$$
$$10=x.$$

Nach 10 Tagen treffen sie zusammen. Denn der erste wird nach 10 Tagen 100 Meilen machen, und 50 hat er schon gemacht, also 150. Der zweyte machet auch innerhalb 10 Tagen 150; also — —

VIII. *Beysp.* Ein Kurier macht täglich 8 Meilen Weges; nach fünf Tagen folget ein zweyter, der den ersten in 6 Tagen einhohlen soll. Wie viel Meilen hat er täglich zu machen?

Die zu machenden Meilen x.

Die von dem ersten in 5 Tagen gemachten Meilen 40.

Die er in 6 Tagen noch zu machen hat 48.

Die der zweyte zu machen hat $6x$.

Also $40+48=6x$

$$88=6x$$

$14\frac{2}{3}=x$ die täglichen Meilen des zweyten.

Denn wenn er täglich $14\frac{2}{3}$ Meilen machet, so wird er in 6 Tagen, wie der erste, 88 zurück legen.

IV. *Beysp.* Zwey Örter liegen 120 Meilen von einander; einer, welcher von dem ersten Orte kommt, macht täglich 6 Meilen; der andere, der von dem entgegen gesetzten Orte kommt, macht täglich 4 Meilen; wann treffen beyde zusammen?

Anzahl der Tage $= x$

Die Meilen des ersten und zweyten zusammen genommen müſsen 120 seyn.

Die Meilen des ersten sind $6x$, des zweyten $4x$, also

$$6x + 4x = 120$$
$$10x = 120$$
$$x = 12$$

Nach 12 Tagen treffen sie zusammen.

ANMERKUNG.

117. Wenn man die drey letzten Beyspiele, welche sich auf bewegliche Dinge beziehen, algebraisch und mit Buchstaben auflöset, so geben sie eben so viel allgemeine Formeln an die Hand, die sich auf alle besondere Fälle anwenden laſsen. Wenn man in dem ersten Beyspiele die Meilen des ersten a, die Meilen des zweyten b, die gegebene Zeit c, und das zu Suchende x nennet, so hat man

$$ac + ax = bx$$
$$ac = bx - ax$$
$$ac = x(b - a)$$
$$\frac{ac}{b - a} = x$$

Die Regel für den ersten Fall ist demnach diese: die täglichen Meilen des ersten, mit der gegebenen Zeit multipliciret, und mit dem Unterschiede der Meilen von beyden dividiret, geben die gesuchte Zeit.

Wenn man im zweyten Beyspiele die zurück gelegten Meilen a; die verfloſsene Zeit b; die gegebene Zeit der Bewegung c; und die noch unbekannte Reise x nennet, so hat man

$$ab + ac = cx$$

$$\frac{ab}{c} + a = x$$

Für den zweyten Fall ist also diese Regel: Das Product, welches aus den täglichen Meilen des ersten Kuriers, multipliciret mit der verfloſsenen Zeit, entstanden ist, und dann mit der gegebenen Zeit und mit den Meilen des ersten zusammen genommen dividiret wird, gibt die Meilen des zweyten.

Wenn in dem dritten Beyspiele der gegebene Zeitraum a; die Reise des ersten b; des zweyten c; und die unbekannte Zeit x heiſset, so hat man $bx + cx = a$

$$(b + c)x = a$$

$$x = \frac{a}{b + c}.$$

Also ist die Regel für den dritten Fall: Man dividiret den gegebenen Zeitraum mit der Summe beyder Tagreisen, dann ist der Quotient die Zeit der Zusammenkunft.

II. AUFGABE.

118. Eine Gleichung zweyer unbekannter Gröſsen auflösen.

AUFLÖSUNG.

I. Man suchet in beyden Gleichungen den Werth einer und eben derselben unbekannten Gröſse, mittels der Übertragung.

II. Dann vergleichet man diese beyden Werthe mit einander, und suchet, nach den obigen Regeln, den Werth der andern unbekannten Grösse, welche übrig geblieben ist.

I. *Beysp.* Wenn die Summe zweyer Zahlen 100, und derselben Unterschied 30 gegeben wird, die zwey Zahlen selbst finden.

Die zu suchenden Zahlen x und y.

Vermöge der ersten Bedingung $x+y=100$.

Vermöge der zweyten Bedingung $x-y=30$.

Also wird aus dem I. $x=100-y$

$x=30+y$

aus dem II. $100-y=30+y$

$100-30=y+y$

$100-30=2y$

$\frac{70}{2}=y$

also $y=35$; und da $x=100-y$ ist, so ist $x=65$; und $65+35=100$; und $65-35=30$.

BEWEIS.

Voraus gesetzt, daſs die Aufgabe bestimmt ist, so müſsen auch zwey verschiedene Gleichungen oder Bedingungen seyn (§. 106.); suchet man nun in beyden Gleichungen den Werth der Grösse x, so hat man zwey Werthe, die verschiedentlich ausgedrückt, aber der nähmlichen Gröſse x gleich sind; Dinge aber, welche einem dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich; also sind auch die beyden verschiedentlich ausgedrückten Werthe unter sich gleich; daher kann man mit ihnen eine Gleichung anstellen, nachdem auf solche Art die andere unbekannte Gröſse weggeschafft ist. Den gefundenen Werth von y setzet man hernach in der ersten Gleichung an die Stellen des y, und so erhält man den Werth der Gröſse x.

FOLGERUNG.

119, Löset man diese Aufgabe mit Buchstaben, so haben wir wieder eine allgemeine Formel, zwey Zahlen zu finden, derer Summe und Unterschied gegeben ist. Wenn nun die Summe $= s$, der Unterschied $= d$ ist; so hat man

$$x+y=s$$
$$x-y=d$$

$$x=s-y$$
$$x=d+y$$

$$s-y=d+y$$
$$s-d=2y$$
$$\frac{s-d}{2}=y \text{ oder } \tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}d=y$$

Suchet man x, so wird anfangs $y=s-x$

$$x-d=y$$

$$s-x=x-d$$
$$s+d=2x$$
$$\frac{s+d}{2}=x, \text{ oder } \tfrac{1}{2}s+\tfrac{1}{2}d=x.$$

Man erhält also die gröſsere Zahl, wenn man die halbe Summe zum halben Unterschied addiret; die kleinere Zahl hingegen, wenn man von der halben Summe den halben Unterschied subtrahiret. In dem vorhergehenden Beyspiele ist die halbe Summe $=50$, der halbe Unterschied $=15$; nun aber ist $50+15=65$, und $50-15=35$. Diese Wahrheit wird in dem folgenden Lehrsatze vorgetragen.

LEHRSATZ.

Der halbe Unterschied, zur halben Summe addiret, gibt die gröſsere Gröſse; der halbe Unterschied, von der halben Summe subtrahiret, gibt die kleinere Gröſse.

I. ANMERKUNG.

120. Diese Aufgaben laſsen sich auch dergestalt lösen, daſs man den in der ersten Gleichung gefundenen Werth der Gröſse x sogleich in der zweyten Gleichung an die Stelle des x setzet, und auf solche Art auch die gröſse x weg-

schaffet. So hat man in dem vorhergehenden Beyspiele aus der ersten Gleichung $x=100-y$; also schreibet man in der zweyten Gleichung $x-y=30$, an die Stelle des x, den Werth $100-y$; und die Gleichung wird seyn $100-y-y=30$, oder $100-30=2y$, wie vorher.

II. ANMERKUNG.

121. Man kann auch die eine oder andere unbekannte Gröſse wegschaffen, wenn man beyde Gleichungen vorher mittels der vorgelegten Bedingungen richtig stellet, und dann eine von der andern subtrahiret, damit wegen der entgegen gesetzten Zeichen die unbekannte Gröſse verschwinde. So stehen in dem I. Beyspiele (§. 118.) diese zwey Gleichungen:

$$x+y=100$$

$x-y=30$; wird diese von jener abgezogen,

so bleibet $2y=70$; und so von den übrigen.

II. *Beysp.* Ein Feuerwerker sagt zu seinem Kameraden: wenn ich dir eine von meinen Kugeln gäbe, würden wir beyde eine gleiche Anzahl haben; der andere antwortet: wenn ich dir eine von den meinigen gäbe, würdest du doppelt so viel haben, als ich.

Die Kugeln des ersten $=x$, des zweyten $=y$.
Vermöge der ersten Bedingung $x-1=y+1$
Vermöge der zweyten $x+1=(y-1)2$
Aus der ersten Gleichung $x=y+1+1$
Aus der zweyten $x=2y-2-1$

$$y+2=2y-3$$
$$2+3=2y-y$$
$$5=y,$$

nun aber ist $x=y+2$; also ist $x=5+2=7$.
Denn, gibt der erste dem zweyten 1, so haben beyde 6; und gibt der zweyte dem ersten 1, so hat dieser 4 und der andere 8.

III. *Beysp.* Die Summe des Peter mit der halben Summe des Paul ist $=20$ Gulden. Die Summe des Paul mit dem dritten Theile des Peter ist auch $=20$ Gulden.

Summe des Peter x Der dritte Theil $=\frac{1}{3}x$ oder $\frac{x}{3}$.

Summe des Paul y. Die Hälfte $\frac{1}{2}y$ oder $\frac{y}{2}$.

Erste Bedingung $x+\frac{y}{2}=20.\ \frac{2x+y}{2}=20.\ 2x+y=40.$

Zweyte Bedingung $y+\frac{x}{3}=20.\ \frac{3y+x}{3}=20.\ 3y+x=60.$

Aus der ersten Gleichung $x=\frac{40-y}{2}$.

Aus der zweyten $x=60-3y$. Also

$$\frac{40-y}{2}=60-3y$$
$$40-y=120-6y$$
$$6y-y=120-40$$
$$5y=80$$
$$y=16.\quad x=60-48.\quad x=12.$$

Summe des Peter $12+\frac{16}{2}=20.$

Summe des Paul $16+\frac{12}{3}=20.$

IV. *Beysp.* Wären um drey Personen mehr bey der Mahlzeit gewesen, so hätte jede um einen Gulden weniger gezahlet; wären aber um zwey Personen weniger gewesen, so hätte jede um einen Gulden mehr zahlen müſsen. Wie viel waren Personen? wie viel Gulden waren zu bezahlen?

Personen $=x$. Gezahlte Summe $=xy$.

Gulden $=y$. Theil einer jeden Person $=\frac{xy}{x}$.

Vermöge der ersten Bedingung.

$$\frac{xy}{x+3}=y-1$$
$$xy=xy-x+3y-3$$
$$xy-xy+x=3y-3$$
$$x=3y-3$$
$$3y-3=2y+2$$
$$y=5$$

Vermöge der zweyten.

$$\frac{xy}{x-2}=y+1.$$
$$xy=xy+x-2y-2$$
$$2y+2=xy-xy+x$$
$$2y+2=x$$
$$x=15-3=12$$

Personen $=12$. Gulden $=5$. Summe $=60$. Wären 10 Personen gewesen, so wären auf jede 6 Gulden gekommen; wären aber 15 Personen gewesen, so fielen auf jede 4 Gulden.

V. *Beysp.* Ein Wirth will 100 Eimer von zweyerley Gattungen Wein zusammen mischen; der Eimer der einen Gattung kostet 42 Groschen, und der andern 27 Groschen; nach gemachter Mischung soll der Eimer um 30 Groschen verkauft werden. Wie viel Eimer mufs er von jeder Gattung nehmen?

Der Eimer der befseren Gattung $=x$, der geringeren $=y$; Summe des gemischten Weines $=100$; Preis der ersten Gattung $=42$, der zweyten $=27$, Preis des ganzen gemischten Weines $=30\times100=3000$.

Die zu mischenden Weine $x+y=100$

Preis $42x+27y=3000$

Vermöge der ersten Bedingung $x=100-y$

Vermöge der zweyten $x=\frac{3000-27y}{42}$

$$100-y=\frac{3000-27y}{42}$$
$$4200-42y=3000-27y$$
$$4200-3000=42y-27y$$
$$1200=15y$$
$$\frac{1200}{15}=y. \quad 80=y.$$

Von der geringeren Gattung sind also 80, folglich von der befseren 20 zu nehmen. Der Preis der geringeren ist

$80 \times 27 = 2160$; der beſseren $20 \times 42 = 840$; und so erhält man $2160 + 840 = 3000$.

VI. *Beysp.* Ein Wirth will die Maſs Wein, die er um 16 Kreuzer verkaufte, künftig um 10 Kreuzer verkaufen, und daher zu jeder Maſs die verhältniſsmäſsige Menge Waſser mischen. Wie viel Wein und Waſser muſs er zu jeder Maſs nehmen?

Menge des Weines $= x$, des Waſsers $= y$.

Beydes zusammen muſs einer Maſs gleich seyn, das ist,

$$x + y = 1.$$

Der neue Preis muſs 10 Kreuzer seyn, und da der Wein 16 Kreuzer, das Waſser aber gar nichts kostet, so ist $16x + y \times 0 = 10$.

Aus der ersten Gleichung $x = 1 - y$

Aus der zweyten $x = \frac{10 - y \times 0}{16}$ das ist $= \frac{10}{16}$

$$1 - y = \tfrac{10}{16}$$
$$16 - 16y = 10$$
$$16 - 10 = 16y$$

$\frac{6}{16} = y$; also ist die Menge des Waſsers $= \frac{6}{16}$ oder $\frac{3}{8}$; folglich muſs man von dem Weine $\frac{5}{8}$ nehmen, um $\frac{8}{8}$ oder eine Maſs zu haben.

I. ANMERKUNG.

122. Die Richtigkeit dieser Auflösung wird auch weiter unten aus dem Gesetze der Proportionen bewiesen.

II. ANMERKUNG.

123. Diese Aufgaben heiſsen *Vermischungs-Regeln*, und werden auch von den Arithmetikern, nach einer besondern hierauf anwendbaren Regel aufgelöset. Sie sind von sehr groſsem Nutzen in der Wirthschaft, Physik, Arzeneykunde u. dgl. wo von einer verhältniſsmäſsigen Mischung der Theile die Rede ist. Man kann daher wieder zur Lösung dieser Aufgaben eine allgemeine Formel entwerfen, das Gemischte mag auch wie immer beschaffen, und die zu vermischenden Theile mögen von was immer für einem Werthe

seyn. Setze man die zu vermischenden Grösen x und y, das zusammengesetzte Ganze sey a, der Preis von x sey b, der Preis von y sey c, der Preis der vermischten Theile sey d, also der Preis des gemischten Ganzen ad; so ist

$$x+y=a$$
$$bx+cy=ad$$
$$x=a-y$$
$$x=\frac{ad-cy}{b}$$
$$a-y=\frac{ad-cy}{b}$$
$$ab-by=ad-cy$$
$$ab-ad=by-cy$$

$\frac{ab-ad}{b-c}=y$; das heisst, man multiplicire die zu bestimmende Grösse mit dem grösseren Preise, und von diesem subtrahire man das Product, welches aus der nähmlichen Grösse, multipliciret mit dem Preise der vermischten Theile, entstanden ist, dann dividire man den Rest mit dem Unterschiede der Preise, und der Quotient wird der kleineren zu vermischenden Grösse gleich seyn.

III. ANMERKUNG.

124. Die Vermischungs - Regeln, wobey mehrere zu vermischende Theile vorkommen, gehören zu den unbestimmten Aufgaben, von denen weiter unten gehandelt wird.

III. AUFGABE.

125. Eine Gleichung von drey unbekannten Grösen auflösen.

AUFLÖSUNG.

I. Man schaffet, nach den vorhergehenden Regeln, gleich anfangs die Grösse x aus den zwey gegebenen Gleichungen weg, und suchet den Werth der Grösse y; so hat man diesen Werth mit der einzigen unbekannten Grösse z.

II. Dann schaffet man, nach den vorhergehenden Regeln, die Gröſse y weg, und suchet den Werth der Gröſse x; so hat man wieder diesen Werth mit der einzigen unbekannten Gröſse z.

III. Hierauf setzet man die beyden gefundenen Werthe in einer der gegebenen Gleichungen, und so hat man die einzige unbekannte Gröſse z.

Beyspiel. Es werden drey Pferde verkauft; der Preis des ersten mit dem halben Preise der übrigen ist 25 Ducaten. Der Preis des zweyten mit dem dritten Theile der übrigen ist 26 Ducaten. Der Preis des dritten mit dem halben Preise der übrigen ist 29. Welchen Preis hat jedes Pferd?

Preis des ersten $=x$, des zweyten $=y$, des dritten $=z$.

Erste Bedingung $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=25$.

Zweyte Bedingung $y+\frac{x}{3}+\frac{z}{3}=26$.

Dritte Bedingung $z+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=29$.

Reduciret man dieſs zu einem gemeinschaftlichen Nenner, und hebet dann die Brüche auf, so erhält man

$$\frac{2x+y+z}{2}=25 \text{ oder } 2x+y+z=50.$$

$$\frac{3y+x+z}{3}=26 \text{ oder } 3y+x+z=78.$$

$$\frac{2z+x+y}{2}=29 \text{ oder } 2z+x+y=58.$$

Nach der I. Reg. Aus der zweyten Gleichung $x=78-3y-z$.
Aus der dritten $x=58-2z-y$.

$$78-3y-z=58-2z-y$$
$$78-58=3y-y-2z+z$$
$$\therefore 20=2y-z$$
$$\frac{20+z}{2}=y. \text{ Also ist der Werth von } y=\frac{20+z}{2}.$$

Nach der II. Reg. Aus der ersten Gleichung $y=50-2x-z$.
Aus der dritten $y=58-2z-x$.

$$50-2x-z=58-2z-x$$
$$2z+x-2x-z=58-50$$
$$z-x=8$$
$$z-8=x$$

Also ist der Werth von $x=z-8$.

Nach der III. Regel. In der ersten Gleichung schreibet man nun statt $2x$ den Werth $(z-8)\,2$, das ist, $2z-16$, und statt y schreibet man $\frac{20+z}{2}$.

Aus der ersten Gleichung $2x+y+z=50$

wird $2z-16+\frac{20+z}{2}=50$

$$\frac{4z-32+20+z+2z}{2}=50$$
$$4z-32+20+z+2z=100$$
$$7z-12=100$$
$$7z=112$$
$$z=\frac{112}{7}=16.$$

Nun aber ist $x=z-8$, also $x=8$, und $y=\frac{20+z}{2}=\frac{36}{2}=18$. Also ist der Preis des ersten $=8$, des zweyten $=18$, des dritten $=16$.

Vermöge der ersten Bedingung $8+9+8=25$.
Vermöge der zweyten $18+2\frac{2}{3}+5\frac{1}{3}=26$.
Vermöge der dritten $16+4+9=29$.

BEWEIS.

Dieser fließet aus folgenden Grundsätzen: zwey Dinge, die einem dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich; und gleiche Dinge bleiben gleich, wenn man an ihre Stelle gleiche Dinge setzet. Entfernet man nun auf solche Art die unbekannten Grösen, und setzet an deren Stelle ihren Werth, so wird die Gleichung zu einer einzigen unbekannten Grösse reduciret, deren Auflösung dann, nach den oben bewiesenen Regeln, zu Stande kommt.

FOLGERUNG.

126. Wenn nicht alle Glieder in jeder Gleichung vorkommen, so ist es nicht nöthig, die unbekannten Grösen zwey Mahl wegzuschaffen, sondern nachdem man an die Stelle der einen unbekannten Grösse ihren Werth gesetzet hat, so weis man auch schon den Werth der andern, wie in dem folgenden Beyspiele.

Ein Kaufmann erinnert sich blos, das ihm Peter und Paul zusammen 10000; Peter und Johann zusammen 11000; Paul und Johann zusammen 9000 schuldig sind. Wie viel ist jeder schuldig?

$x+y=10000.\quad x+z=11000.\quad y+z=9000.$

Aus der ersten Gleichung $x=10000-y$

Aus der zweyten $x=11000-z$

$$10000-y=11000-z$$
$$z-y=11000-10000$$
$$z=1000+y.$$

Setzet man nun in der dritten Gleichung statt der Grösse z ihren Werth, so hat man statt z

$$y+1000+y=9000$$
$$2y=9000-1000$$
$$y=\frac{8000}{2}=4000.$$

Vorher aber hatte man $x=10000-y$, das ist, $10000-4000=6000$, und $z=1000+y$, das ist, $1000+4000$; also ist $z=5000$; und auf solche Art findet sich die Schuld des Peter $=6000$; des Paul $=4000$; des Johann $=5000$.

IV. AUFGABE.

127. Eine Gleichung einer unbestimmten Aufgabe lösen.

AUFLÖSUNG.

I. Man reduciret die Gleichung, so zwar, daſs nur auf einer Seite eine unbekannte Gröſse vorhanden, und diese der anderen Gröſse, welche die zweyte unbekannte mit den bekannten Grössen enthält, gleich sey; dann nimmt man in dem zweyten Gliede nach Belieben einen Werth der unbekannten Gröſse, und suchet den Werth der ersten; nur hat man dabey zu sehen, ob er der gegebenen Aufgabe angemeſsen sey. Ist er dieses, so hat man die erste Auflösung.

II. Hierauf nimmt man eine andere Zahl, und suchet, ob auch diese die gestellte Frage befriedige. Thut sie dieses, so hat man auch die zweyte Auflösung.

III. Dieſs setzet man so lange fort, bis die Auflösung unmöglich wird, da nähmlich entweder eine zu groſse, oder zu kleine Zahl genommen wird.

I. Beyspiel. Es seyn zwey Zahlen zu finden, welche zusammen 12 machen. Die Gleichung ist $x+y=12$; also $x=12-y$; nimmt man statt y eine Einheit, so hat man $x=11$. Nimmt man von y den Werth 2, so wird $x=10$; ist $y=3$, so ist $x=9$ u. s. f. Es gibt also hier 11 Auflösungen, da man nähmlich so viele Werthe in ganzen Zahlen statt y setzen kann, welche alle der Aufgabe Genüge leisten. Auch gebrochene Zahlen kann man dafür setzen, und die Aufgabe damit lösen. Ist $y=\frac{1}{2}$, so ist $x=11+\frac{1}{2}$; ist $y=\frac{1}{4}$, so ist $x=11+\frac{3}{4}$; ist $y=6\frac{2}{3}$, so ist $x=5\frac{1}{3}$;

und so kann man die Auflösung unbestimmt fortsetzen. Ist endlich $y=12$, so ist $x=0$, und folglich die Auflösung unmöglich, indem auf solche Art die zweyte Zahl sich verlieret. Ist $y=13$, so ist $x=-1$; ist $y=20$, so ist $x=-8$ u. s. f. Und so kann man auch durch verneinte Gröfsen die Auflösung wieder ins Unendliche fortsetzen.

II. Beyspiel. Es seyn unter 30 Arme 100 Gulden dergestalt zu vertheilen, dafs die Männer 8 Gulden, die Weiber 5 Gulden, und die Kinder 1 Gulden empfangen. Wie viel sind Männer, Weiber, Kinder?

$x+y+z=30$ Anzahl der Personen.

$8x+5y+1z=100$ Gulden zu vertheilen.

Aus der ersten Gleichung $x=30-y-z$

Aus der zweyten $x=\dfrac{100-5y-z}{8}$

$$30-y-z=\frac{100-5y-z}{8}$$

$$240-8y-8z=100-5y-z$$

$$240-100=8y-5y+8z-z$$

$$140=3y+7z$$

$$140-3y=7z$$

$$\frac{140-3y}{7}=z$$

Da z und y Menschen bedeuten, so kann der in Brüchen bestehende Werth die Aufgabe nicht befriedigen; folglich kann statt y kein Werth gesetzet werden, welcher, von 140 subtrahiret, und mit 7 dividiret, einen gebrochenen Quotienten gibt; daher können die Zahlen 1. 2. 3. 4. 5. 6. statt y nicht gesetzet werden, indem sie statt z eine Bruchzahl geben. Wird $y=7$, so ist $z=\frac{119}{7}=17$; also $x=30-7-17=6$; und $8x+5y+z$, das ist $48+35+17=100$ die erste Auflösung. Die übrigen Zahlen bis auf 14 geben wieder einen gebrochenen Quotienten. Wird $y=14$, so ist $z=\frac{98}{7}=14$; daher $x=2$ und $8x+5y+z$, das ist $16+70+14=100$ die zweyte Auflösung. Wird $y=21$, so wird x verneinend; denn z wäre $=11$; daher ist nun keine andere Auflösung mehr möglich.

III. Beyspiel. Ein Wirth will einen Wein, wovon die Maſs 4 Kreuzer kostet, mit einem anderen Wein, wovon die Maſs 8 Kreuzer, und mit noch einem anderen, wovon die Maſs 20 Kreuzer kostet, vermischen, so zwar, daſs er 20 Maſs des gemischten Weines erhält, und davon die Maſs um 10 Kreuzer verkaufen kann. Wie viel Maſs muſs er von jedem Weine zur Mischung nehmen?

$$x+y+z=20$$
$$4x+8y+20z=200$$
$$x=20-y-z$$
$$x=\frac{200-8y-20z}{4}$$
$$20-y-z=\frac{200-8y-20z}{4}$$
$$80-4y-4z=200-8y-20z$$
$$8y+20z-4y-4z=200-80$$
$$4y+16z=120$$
$$4y=120-16z$$
$$y=30-4z.$$

Nimmt man $z=1$, so ist $y=26$; dieſs widerspricht aber der Aufgabe, weil der gemischte Wein nur aus 20 Maſs bestehen soll. Der nähmliche Fall ist, wenn $z=2$, oder $=3$ wird. Nimmt man es aber $=4$, so ist $y=14$, und $x=2$. Der Preis ist also $4x+8y+20y$, das ist, $8+112+80=200$. Nimmt man $z=5$, so ist $y=10$; und $x=5$, und der Preis $20+80+100=200$. Ist $z=6$, so ist $y=6$, und $x=8$, der Preis $32+48+120=200$. Ist $z=7$, so ist $y=2$, und $x=11$; der Preis aber $44+16+140=200$. Ist $z=8$, so werden y und x

verneinend; folglich ist die Auflösung unmöglich. Es gibt also nur diese vier Auflösungen, welche der Aufgabe genugthun.

IV. Beyspiel. 30 Stück Vieh sind um 75 Thaler gekauft worden; ein Hammel kam um 5 Thaler, ein Schaf um 3 Thaler, und ein Lamm um 2 Thaler zu stehen. Wie viel waren von jeder Gattung?

$$x+y+z=30. \qquad x=30-y-z.$$

$$5x+3y+2z=75. \qquad x=\frac{75-3y-2z}{5}.$$

$$150-5y-5z=75-3y-2z$$

$$150-75=5y-3y+5z-2z$$

$$75=2y+3z$$

$$75-3z=2y$$

$$y=\frac{75-3z}{2}.$$

Wenn man von 1 bis auf 16 die Werthe statt z setzet, so wird der Werth von y immer entweder ein Bruch oder zu groſs seyn, als daſs er die Aufgabe befriedigte. Ist $z=17$, so ist $y=\frac{24}{2}=12$, und $x=1$. Ist $z=18$, so entstehet ein Bruch. $z=19$, und $z=21$, und $z=23$ gibt folgende Werthe und vier Lösungen der Aufgabe:

$z=17$	$y=12$	$x=1$
19	9	2
21	6	3
23	3	4

ANMERKUNG.

128. Es bedarf hier keines neuen Beweises; denn nach den oben bewiesenen Regeln suchet man den Werth der einen unbekannten Gröſse, den Werth der anderen aber nimmt man nach Belieben, und versuchet damit die Aufgabe zu lösen.

VII. ERKLÄRUNG.

129. Eine *vollständige* Quadrat - Gleichung

ist, wo die unbekannte Gröſse allein zur zweyten Würde erhoben, und folglich ein vollkommenes Quadrat vorhanden ist, wie $x^2 = aa$. Eine *unvollständige*, wenn von den drey Gröſsen, welche zu einem zweygliederigen Quadrate erfordert werden, (wie bey den Würden gesagt worden ist) die letzte oder das Quadrat des zweyten Gliedes mangelt, welches also vor der Auflösung hinzugesetzt werden muſs, um auf solche Art das Quadrat vollständig zu machen: wie $xx + ax = bb$; oder $xx + 17x = 60$; oder $xx + x = 100$.

V. AUFGABE.

130. Eine vollständige Quadrat-Gleichung auflösen.

AUFLÖSUNG.

I. Die unbekannten Gröſsen setzet man auf die eine, die bekannten auf die andere Seite.

II. Hänget an dem Quadrate der unbekannten Gröſse ein Coefficient oder ein Divisor, so wird er durch entgegengesetztes Verfahren weggenommen.

III. Ist das Quadrat verneinend, so machet man es durch die Übertragung auf die andere Seite bejahend, indem gar kein verneinendes Quadrat bestehen kann (§. 41.).

IV. Endlich wird aus beyden Gliedern die Quadrat-Wurzel ausgezogen.

I. Beysp. $\frac{100 - xx}{2} = 20 - 2$ durch Aufhebung des Divisors wird

$100 - xx = 40 - 4$ die bekannten Gröſsen auf die eine Seite

$100 - 40 + 4 = xx$ durch Ausziehung der Quadrat-Wurzel

$10 - 2 = x$; also $x = 8$.

II. Beysp. $82+2xx=180$

$$2xx=180-82$$
$$xx=\frac{98}{2}$$
$$x=\sqrt{49};\ \text{also}\ x=7.$$

VI. AUFGABE.

131. Eine unvollständige Quadrat-Gleichung auflösen.

AUFLÖSUNG.

I. Man setzet die unbekannten Gröſsen auf die eine Seite, so zwar, daſs das verneinte Quadrat der unbekannten Gröſse x das erste Glied, die unbekannte Gröſse x^2 mit ihrem Coefficienten aber das zweyte Glied ausmache. Die bekannten Gröſsen kommen alle auf die andere Seite.

II. Der Coefficient der zweyten Gröſse x wird mit 2 dividiret, und aus diesem Bruche das Quadrat gemacht, welches zu beyden Theilen addiret wird.

III. Aus dem ersten Gliede wird die Wurzel ausgezogen, indem man nähmlich die Gröſse x, und den vorerwähnten Coefficienten mit seinem Nenner 2 setzet, das doppelte Product aber wegläſst. Das nähmliche geschieht bey dem zweyten Gliede.

IV. Die andere an der unbekannten Gröſse x hängende Wurzel wird auf die andere Seite übertragen; und nun wird die Aufgabe gelöset seyn.

BEYSPIELE.

I. $10x=600xx$

$x^2+10x=600$ die andere Wurzel $\frac{10}{2}$, das Quadrat $\frac{100}{4}$

$$x^2+10x+\frac{100}{4}=600+\frac{100}{4}$$
$$x+\frac{10}{2}=\sqrt{625}$$
$$x=25-5=20.$$

II. $x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}$ also die andere Wurzel $\frac{2}{3} : 2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

$$x + \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ und $x = \frac{1}{3}$.

III. $x^2 - \left(\frac{a-b}{c}\right)x = d^2$ die andere Wurzel $\frac{a-b}{2c}$

$$x^2 - \left(\frac{a-b}{c}\right)x + \frac{a^2-2ab+b^2}{4c^2} = d^2 + \frac{a^2-2ab+b^2}{4c^2}$$

$$x - \frac{a-b}{2c} = \frac{\sqrt{a^2-2ab+b^2+d^2}}{4c^2}$$

$$x = \frac{\sqrt{a^2-2ab+b^2+d^2}}{4c^2} + \frac{a-b}{2c}$$

BEWEIS.

Ein unvollständiges Quadrat bestehet aus dem Quadrate der ersten Wurzel, und aus dem doppelten Producte der Wurzeln, die mit einander multipliciret sind; um es also vollständig zu machen, muſs man das Quadrat der zweyten Wurzel hinzu setzen; denn in dem doppelten Producte, das ist, in x mit seinem Coefficienten, sind beyde Wurzeln enthalten; da also der eine Factor x ist, so muſs der andere der Coefficient deſselben seyn; weil aber das Product doppelt ist, so nimmt man den halben Coefficienten, oder man dividiret den Coefficienten mit 2, um das Product und den Factor einfach zu haben; machet man nun das Quadrat daraus, so hat man das, was noch mangelt; und wenn man dieses addiret, so wird dadurch die Quadrat-Gleichung vollständig; um aber die Gleichheit zu erhalten, muſs diese Gröſse auf beyden Seiten addiret werden. Wenn nun zwey Quadrate einander gleich sind, so müſsen auch die ausgezogenen Wurzeln einander gleich seyn; denn da die Quadrate aus der Multiplication der nähmlichen Zahl mit ihr selbst entstehen, und jedes Quadrat nur eine einzige Wurzelzahl enthält, so ist es unmöglich, daſs die Wurzeln verschieden ausfallen, wenn die Quadrate einander gleich sind.

IV. Beyspiel. Die Summe zweyer Zahlen ist 17; das Product aber ist 60. Welche sind die zwey Zahlen?

Summe $x+y=17$. $x=17-y$.

Product $xy=60$; $x=\frac{60}{y}$

$17-y=\frac{60}{y}$

$17y-y^2=60$

$-60=y^2-17y$ die zweyte Wurzel $\frac{17}{2}$, das Quadrat $\frac{289}{4}$

$\frac{289}{4}-60=y^2-17y=\frac{289}{4}$

$\frac{289}{4}-\frac{240}{4}=y^2-17y+\frac{289}{4}$

$\frac{49}{4}=y^2-17y+\frac{289}{4}$

$\frac{7}{2}=y-\frac{17}{2}$

$\frac{17}{2}+\frac{7}{2}=y$ das ist $y=12$; also $x=5$.

FOLGERUNG.

132. Da das doppelte Product $17y$ verneinend ist, so muſs auch der eine oder andere Factor verneinend seyn, entweder $\frac{17}{2}$ oder y; in der Auflösung ist der Werth von y bejahend, und $\frac{17}{2}$ verneinend gemacht worden. Wäre y verneinend und $\frac{17}{2}$ bejahend genommen, so wäre die Gleichung $\frac{7}{2}=\frac{17}{2}-y$ und durch die Übertragung $y=\frac{17}{2}-\frac{7}{2}=\frac{10}{2}=5$; also $y=5$ und $x=12$. Hieraus erhellet, daſs diese Aufgabe und überhaupt jede Quadratgleichung auf zweyfache Art gelöset werden kann. Denn, ist das Quadrat eingliederig, so kann es entweder eine bejahete oder verneinte Wurzel haben, indem aus beyden, wenn sie mit einander multipliciret werden, ein bejahetes Quadrat entstehet; daher

sind in der Gleichung $x^2=a$, so wohl $+x$, als $-x$ die Wurzeln, welche beyde der Aufgabe Genüge leisten. In einer zweygliederigen Gröſse, wenn das doppelte Product bejahend ist, sind beyde Wurzeln entweder bejahend oder verneinend; ist aber das Product verneinend, so ist auch die eine oder andere Wurzel verneinend. So wohl auf die eine, als auf die andere Art wird die Aufgabe immer gelöset, obgleich von den angehängten Bedingungen nur eine bisweilen gebraucht werden kann.

V. Beysp. Eine Zahl finden, deren Vierfaches, von ihrem Quadrate abgezogen, 21 übrig läſst.

$x^2-4x=21$, Zweyte Wurzel $\frac{4}{2}=2$

$x^2-4x+4=21+4$. $x^2-4x+4=25$

$x-2=5$; oder $2-x=5$

$x=7$ $2-5=x$ und $-3=x$

also $x=7$ und $x=-3$, beyde Werthe sind befriedigend. Wird der erste Werth statt x gesetzet, so ist das Quadrat 49, und das Vierfache 28; dieses subtrahiret, gibt $49-28=21$. Setzet man den zweyten Werth, so ist das Quadrat von $-3=9$; und das Vierfache $-3\times4=-12$; wird nun dieses subtrahiret, so muſs daraus $+12$ werden; nun aber ist $9+12=21$.

VI. Beysp. Die Summe zweyer Zahlen sey $=10$; der Unterschied der Quadrate $=40$. Welche sind die zwey Zahlen?

$$x+y=10;\quad x=10-y \text{ und } x^2=100-20y+y^2$$
$$x^2-y^2=40;\quad x^2=40+y^2$$
$$100-20y+y^2=40+y^2$$
$$100-40=20y+y^2-y^2$$
$$60=20y$$
$$3=y \qquad x=7$$
$$7+3=10. \qquad 49-9=40.$$

VII. Beysp. Wenn die Summe zweyer Zahlen 10, und die Summe der Quadrate 58 gegeben wird, die Zahlen selbst finden.

$$x+y=10;\quad x=10-y;\quad x^2=100-20y+y^2$$
$$x^2+y^2=58 \qquad x^2=58-y^2$$
$$100-20y+y^2=58-y^2$$
$$2y^2-20y=58-100$$
$$y^2-\frac{20y}{2}=\frac{58-100}{2}$$; die zweyte Wurzel $\frac{20}{4}=5$
$$y^2-10y+25=25-21$$
$$y-5=\sqrt{4} \text{ oder } 5-y=\sqrt{4}$$
$$y-5=2 \qquad 5=2+y$$
$$y=7 \qquad 3=y$$
$$x=3 \qquad 7=x$$
$$7+3=10 \qquad 49+=58.$$

ANMERKUNG.

133. Was noch von den Gleichungen anderer Würden zu sagen ist, wird der höheren Mathematik vorbehalten.

VII. HAUPTSTÜCK.

VON DEN VERHÄLTNISSEN.

I. ERKLÄRUNG.

134. *Verhältniſs* (Ratio) heiſst die Vergleichung zweyer Gröſsen, oder die Beziehung, welche die eine auf die andere hat. Diese Vergleichung aber findet Statt, entweder wenn man den Unterschied der einen von der anderen betrachtet,

welches durch die Subtraction bewirket wird, z. B. 6 und 2, derer Unterschied 4 ist; oder, wenn man untersuchet, wie oft die eine in der anderen enthalten sey, damit man einen Quotienten erhalte, welches mittels der Division erreichet wird; z. B. 6 und 2 geben den Quotienten 3. Die erste Vergleichung heiſst das *arithmetische*, das zweyte das *geometrische Verhältniſs*. Wenn ich z. B. eine Säule von 3 Klaftern mit einer Säule von 9 Klaftern vergleiche, und diese letztere um 6 Einheiten gröſser betrachte, so stehen sie gegen einander im arithmetischen Verhältniſse; betrachte ich aber die letztere als drey Mahl so groſs, so stehen sie im geometrischen Verhältniſse. Das erstere drücket man immer mittels einer zwischen beyden Gröſsen gezogenen Linie aus, z. B. 3—9; die letztere aber mittels zweyer dazwischen gesetzter Punkte, z. B. 3 : 9. Denn das erstere Verhältniſs erhält man durch die Subtraction, deren Zeichen eine Linie ist; das letztere durch die Division, deren Zeichen zwey Punkte sind. In beyden Fällen bedienet man sich des Wörtchens *zu*, z. B. 3 zu 9. In algebraischen Ausdrücken setzen wir statt der Linie einen Punkt; z. B. $a \,.\, b$ ist ein arithmetisches Verhältniſs.

FOLGERUNG.

135. Bey jedem Verhältniſse kommen also drey Stücke zu betrachten: die Gröſse, welche verglichen wird; dann die andere Gröſse, mit welcher die erste verglichen wird; und der Unterschied bey einem arithmetischen, oder der Quotient bey einem geometrischen Verhältniſse, wodurch die Art der Vergleichung dargestellet wird. Man kann aber diese Vergleichung dergestalt anstellen, daſs entweder das erste, oder das zweyte Glied gröſser sey, und daſs man den

Unterschied durch die Subtraction des ersten Gliedes von dem zweyten, oder des zweyten von dem ersten erhalte; z. B. 2—6 oder 6—2; der Unterschied in beyden Fällen ist 2. So wird bey einem geometrischen Verhältnifse entweder das zweyte Glied mit dem ersten, oder das erste mit dem zweyten dividiret z. B. 3 : 12 oder 12 : 3; in beyden ist der Quotient 4. Ist das erste Glied kleiner als das zweyte, so nennt man diefs ein *wachsendes* oder *steigendes* Verhältnifs; und ist das erste Glied gröfser als das zweyte, so heifst es ein *abnehmendes* oder *fallendes* Verhältnifs.

II. ERKLÄRUNG.

136. Die verglichenen Gröfsen heifsen *Glieder*. Die vorhergehende Gröfse (Antecedens) heifst *das erste Glied;* die nachfolgende (Consequens) *das zweyte Glied.* Die Vergleichungsart heifst bey einem arithmetischen Verhältnifse *der Unterschied;* bey einem geometrischen der *Quotient;* letzterer wird auch zugleich der *Exponent* des Verhältnifses genannt.

I. FOLGERUNG.

137. Jedes geometrische Verhältnifs bekommt man durch die Division; jeder Bruch aber ist eine Division; also kann jeder Bruch als ein geometrisches Verhältnifs betrachtet werden.

II. FOLGERUNG.

138. Eben so folget aus den vorhergehenden, dafs bey einem arithmetischen Verhältnifse die Glieder blofs durch den Unterschied, bey einem geometrischen aber blofs durch den Quotienten sich unterscheiden. Wenn man also bey einem arithmetischen Verhältnifse den Unterschied zu dem kleineren Gliede addiret, oder wenn man bey einem geometrischen Verhältnifse das kleinere Glied mit dem Quotienten multipliciret, so erhält man in beyden Fällen das

gröſsere Glied. Ist das erste Glied 2, und der Quotient 3, so ist das zweyte Glied $2 \times 3 = 6$. Ist das vorhergehende Glied 2 und der Unterschied 3, so ist das nachfolgende $2 + 3 = 5$. Überhaupt also ist bey einem arithmetischen Verhältniſse jedes zweyte Glied nichts anders als das erste Glied selbst mehr dem Unterschiede; bey einem geometrischen aber das erste Glied, mit dem Quotienten multipliciret.

III. FOLGERUNG.

139. Will man demnach einen allgemeinen algebraischen Ausdruck eines arithmetischen Vehältniſses haben, so nenne man das erste Glied a, und den Unterschied d dann ist das zweyte Glied $a+d$. Ist das erste Glied b, so ist das zweyte $b+d$. Ist jenes c, so ist dieses $c+d$. Nennet man aber bey einem geometrischen Verhältniſse das erste Glied a und den Quotienten q, so ist das zweyte aq. Heiſst das erste b, so ist das zweyte bq. Ist jenes c, so ist dieses cq. Die allgemeine Formel des arithmetischen Verhältniſses ist also diese: $a \,.\, a+d$; oder $b \,.\, b+d$; oder $c \,.\, c+d$; des geometrischen Verhältniſses hingegen $a : aq$, oder $b : bq$, oder $c : cq$. Überhaupt statt des zweyten Gliedes kann man immer das erste selbst $+d$ oder $\times q$ schreiben, welches durch die folgenden zwey Lehrsätze ausgedrückt wird.

I. LEHRSATZ.

140. Bey dem arithmetischen Verhältniſse ist die Summe des kleineren Gliedes und des Unterschiedes dem gröſseren Gliede gleich.

II. LEHRSATZ.

141. Bey dem geometrischen Verhältniſse ist das Product, welches durch die Multiplication des kleineren Gliedes mit

dem Quotienten entstanden ist, dem grösseren Gliede gleich.

Der Beweis beyder Lehrsätze wird aus den vorhergehenden Folgerungen geführet.

ANMERKUNG.

142. Trifft der Fall ein, daſs das erste Glied gröſser ist, so ist das zweyte das vorhergehende $-d$; und dann ist das Verhältniſs $a \,.\, a-d$. Bey einem geometrischen Verhältniſse ist das nachfolgende Glied nichts anders, als das vorhergehende, mit dem Quotienten dividiret, und die Formel ist $a : \frac{a}{q}$.

III. ERKLÄRUNG.

143. *Gleiche* Verhältniſse sind, welche den nähmlichen Unterschied oder den nähmlichen Quotienten haben; z. B. $7-3$; $9-5$ sind gleiche Verhältniſse; denn beyde haben den nähmlichen Unterschied 4; folglich verhält sich 7 zu 3, wie 9 zu 5; $a \,.\, a+d$ und $b \,.\, b+d$ sind gleiche Verhältniſse. So wie auch $3 : 15$ und $2 : 10$; denn sie haben den nähmlichen Quotienten 5, und 3 verhält sich zu 15, wie 2 zu 10; $a : aq$ und $b : bq$ sind gleiche Verhältniſse. *Ungleiche* sind diejenigen, welche verschiedene Quotienten oder verschiedene Unterschiede haben.

IV. ERKLÄRUNG.

144. Wenn in zwey gleichen Verhältniſsen die vorhergehenden gröſser oder kleiner sind, als die nachfolgenden, das heiſst, wenn sich in dem ersten Verhältniſse das erste Glied zu dem zweyten eben so verhält, wie in dem zweyten

Verhältnisse das erste Glied zu dem zweyten, oder wenn beyde Verhältnisse wachsend oder beyde abnehmend sind, so sind sie *gerade Verhältnisse.* Z. B. 7—3 steht in geradem Verhältnisse mit 9—5. Eben so 3 : 15 mit 2 : 10. Ist aber das vorhergehende Glied des ersten Verhältnisses grösser als sein nachfolgendes, und das vorhergehende des zweyten Verhältnisses kleiner als sein nachfolgendes, oder das erste kleiner, und das zweyte grösser, das heisst, verhält sich im ersten Verhältnisse das erste Glied zum zweyten, wie im zweyten Verhältnisse das zweyte Glied zum ersten, oder ist ein Verhältniss wachsend und das andere abnehmend, so sind sie keine wahren Verhältnisse, sondern man pflegt sie insgemein *verkehrte* zu nennen. Dergleichen sind 7—3 und 5—9 im *verkehrten* Verhältnisse; eben so 3 : 15 wie 10 : 2; $a \,.\, a+d$ wie $b+d \,.\, b$; ferner $a : aq$ und $bq : b$ im *verkehrten* Verhältnisse.

ANMERKUNG.

145. Jedes verkehrte Verhältniss läst sich in ein gerades verändern, wenn man nämlich die Glieder des einen oder andern Verhältnisses versetzet, damit sie die nähmliche Ordnung, wie das andere, haben, und dann beyde Verhältnisse wachsend oder abnehmend werden.

V. ERKLÄRUNG.

146. Ein Verhältniss der Gleichheit nennet man, wenn das erste und zweyte Glied aus gleichen oder eben denselben Grössen bestehet; wie 6═6. Ein *doppeltes* geometrisches Verhältniss ist dasjenige, wenn das zweyte Glied zwey Mahl in dem ersten enthalten, oder wenn der Quotient oder Exponent 2 ist, als 6 : 3 und 10 : 5 und 8 : 4 und 20 : 10. Ein *dreyfaches*, wenn das zweyte

Glied in dem ersten drey Mahl, als 6 : 2 und 12 : 4; ein *Vierfaches*, wenn es vier Mahl, als 20 : 5 und 8 : 2 u. s. w. enthalten ist. Es sind noch mehrere dergleichen Benennungen, die aber bereits außer Gebrauche sind. Man pflegt sie insgemein nach ihren Quotienten zu benennen.

VI. ERKLÄRUNG.

147. Wenn bey mehreren geometrischen Verhältnifsen die ersten Glieder mit einander, und auch die zweyten Glieder mit einander multipliciret werden, so nennet man das Product ein *zusammengesetztes Verhältnifs*, und die einfachen Verhältnifse heifsen die *zusammensetzenden;* so wird aus den Verhältnifsen 2 : 9 und 4 : 7 das zusammengesetzte Verhältnifs 8 : 63; aus 3 : 6 und 4 : 16 wird 12 : 96. Der Exponent eines zusammengesetzten Verhältnifses ist immer das Product der Exponenten der zusammensetzenden Verhältnifse. So sind bey dem letzten Verhältnifse die einfachen Exponenten 2 und 4; der Exponent des zusammengesetzten Verhältnifses ist 8, das Product von 2 mit 4. Es seyn z. B. die zwey Verhältnifse $a : b$ und $c : d$, der Exponent oder Quotient des ersten Verhältnifses sey m, des zweyten n, so wird das erste Verhältnifs, vermöge der III. Folgerung, in $a : am$, und das zweyte in $c : cn$ verändert. Wird es nun ein zusammengesetztes Verhältnifs, so hat man $ac : acmn$, und dann ist der Exponent mn, das Product von m mit n. Machet man aus zwey gleichen Verhältnifsen ein zusammengesetztes Verhältnifs, so heifst dieses ein *gedoppeltes* oder *quadratisches* Verhältnifs; und dann ist der Exponent des zusammengesetzten Verhältnifses das Quadrat des einfachen Exponenten. Denn der Exponent des zusammengesetzten

Verhältnifses ist das Product der Exponenten beyder zusammensetzenden Verhältnifse; nun aber ist bey gleichen Verhältnifsen auf beyden Seiten der nähmliche Exponent, also wird er mit sich selbst multipliciret; aus einer solchen Multiplication aber entstehet ein Quadrat, also ist der Exponent des zusammengesetzten Verhältnifses das Quadrat des einfachen Exponenten; aus $2:4$ und $3:6$ wird $6:24$, defsen Exponent 4 das Quadrat des Exponenten 2 ist. Nimmt man die zwey gleichen Verhältnifse $a:aq$ und $b:bq$, so ist das zusammengesetzte $ab:abqq$, und defsen Exponent ist qq; diefs aber ist das Quadrat des einfachen Exponenten q, also. Werden drey gleiche Verhältnifse mit einander multipliciret, so heifst dieses ein *gedrittes* oder *kubisches* Verhältnifs, und sein Exponent ist in diesem Falle der Kubus des einfachen Exponenten; aus $2:4$ und $3:6$ und $4:8$ wird $24:192$, und defsen Exponent ist 8, der Kubus des einfachen Exponenten 2. Sind drey Verhältnifse $a:aq$ und $b:bq$ und $c:cq$, so ist das zusammengesetzte $abc:abcqqq$, und defsen Exponent q^3 ist der Kubus des einfachen Exponenten q; und so kann weiter ein geviertes, gefünftes, gesechstes Verhältnifs werden, u. s. f.

LEHRSATZ.

148. Wenn die Glieder eines geometrischen Verhältnifses mit der nähmlichen Gröfse entweder multipliciret, oder dividiret werden, so wird dadurch das Verhältnifs nicht verändert.

BEWEIS.

Jedes geometrische Verhältnifs ist als ein

Bruch anzusehen (§. 136.); nun aber wird der Werth eines Bruches nicht verändert, wenn man so wohl den Zähler als den Nenner mit der nähmlichen Gröſse multipliciret oder dividiret (§. 88): also kann auch dadurch der Werth eines geometrischen Verhältniſses nicht verändert werden.

VIII. HAUPTSTÜCK.

VON DEN PROPORTIONEN.

I. ERKLÄRUNG.

149. *Proportion* heiſst die Vergleichung zweyer gleichen Verhältniſse, und zwar eine *arithmetische* Proportion, wenn arithmetische; eine *geometrische*, wenn geometrische Verhältniſse verglichen werden. Daher können alle Verhältniſse eines gleichen Unterschiedes oder Quotienten in eine Proportion verändert und zusammengesetzt werden, wenn man zwischen denselben das Gleichheitzeichen $=$ machet. Diese zwey gleichen Verhältniſse $3-7$ und $5-9$ geben die arithmetische Proportion $3-7=5-9$. Und diese zwey gleichen Verhältniſse $3:9$ und $4:12$ geben die geometrische Proportion $3:9=4:12$. Die erste wird ausgesprochen: *drey verhält sich zu sieben arithmetisch, wie fünf zu neun.* Die zweyte: *drey verhält sich zu neun, wie vier zu zwölf.* Bey der letzteren wird der Ausdruck *geometrisch* nicht hinzu gesetzt, weil man bey jeder Proportion,

die ohne Beysatz ausgesprochen wird, immer eine geometrische verstehet.

I. FOLGERUNG.

150. Jede Proportion muſs also vier Glieder haben; zwey vorhergehende, und zwey nachfolgende. Das erste und das letzte heiſsen die äuſseren; das zweyte und das dritte die mittleren Glieder.

II. FOLGERUNG.

151. Was von den Verhältniſsen gesagt worden ist, läſst sich auch auf die Proportionen anwenden. So ist die Proportion *gerade*, wenn sich beyde vorhergehenden Glieder zu ihren nachfolgenden Gliedern gleich verhalten, wie in der obigen Proportion. *Verkehrt* wird sie heiſsen, wenn das zweyte Verhältniſs sich auf eine entgegen gesetzte Art verhält, das ist, wenn sich das erste Glied zu dem zweyten, wie das vierte zu dem dritten verhält, oder wenn man durch die Subtraction des ersten von dem zweyten den nähmlichen Unterschied, wie durch die Subtraction des vierten von dem dritten, oder durch die Division des zweyten mit dem ersten den nähmlichen Quotienten, wie durch die Division des dritten mit dem vierten erhält; z. B. $3-7=9-5$ oder $3:9=12:4$. Durch verkehrtes Verfahren erhält man den Unterschied 4 in der ersten, und den Quotienten 3 in der zweyten Proportion; kurz, die Proportion ist verkehrt, wenn ein Verhältniſs wächst, und das andere abnimmt. Sie wird also immer in eine gerade und wahre Proportion verändert, wenn man die Glieder des zweyten Verhältniſses umkehret.

III. FOLGERUNG.

152. Hieraus läſst sich auch ein allgemeiner Ausdruck der Proportionen ableiten; denn da jedes arithmetische Verhältniſs durch $a \,.\, a+d$ oder $b \,.\, b+d$ angezeiget wird, so hat man, wenn zwey solche Verhältniſse durch das Zeichen

der Gleichheit verbunden werden, die allgemeine Formel der arithmetischen Proportion $a \,.\, a+d = b \,.\, b+d$; und da die geometrischen Verhältnisse $a : aq$ oder $b : bq$ sind, so ist die Vergleichung dieser zwey gleichen Verhältnisse $a : aq = b : bq$.

II. ERKLÄRUNG.

153. Ist das zweyte Glied des ersten Verhältnisses zugleich das erste Glied des zweyten Verhältnisses, oder sind die zwey mittleren Glieder gleich, so heisst die Proportion eine *stätige*; z. B. $3-5=5-7$, oder $3 : 6 = 6 : 12$, oder $a : b = b : c$. Bey dieser pflegt man das zweyte und dritte Glied zusammen nur ein Mahl zu schreiben, und die arithmetische Proportion so auszudrücken $\div 3-5-7$; die geometrische hingegen $\div\!\!\div 3 : 6 : 12$. So auch $\div\!\!\div a : b : c$ und dann heisst das zweyte das mittlere Proportionalglied.

FOLGERUNG.

154. Wenn man in dieser stätigen Proportion die in der III. Folgerung angeführte Verhältniss - Formel $a \,.\, a+d$ anwendet, so ist das zweyte Verhältniss $a+d \,.\, a+2d$; denn da das vorhergehende Glied des zweyten Verhältnisses dem nachfolgenden des ersten Verhältnisses gleich seyn muss, so ist hier das vorhergehende $a+d$; und da das nachfolgende Glied um den Unterschied vermehret werden muss, so ist hier das nachfolgende $a+d+d$ oder $a+2d$; und die Proportion Formel $\div a \,.\, a+d \,.\, a+2d$. Ist bey der geometrischen Proportion das erste Verhältniss $a : aq$, so muss das zweyte $aq : aqq$ seyn; denn da das nachfolgende Glied des zweyten Verhältnisses nichts anderes ist, als das vorhergehende, multipliciret mit dem Quotienten; so ist dessen nachfolgendes Glied $aq \times q = aq^2$; und die Formel der geometrischen Proportion ist $\div\!\!\div a : aq : aq^2$.

HAUPTLEHRSATZ.

155. Bey jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äuſseren Glieder, der Summe der mittleren Glieder gleich; bey jeder geometrischen hingegen ist das Product der äuſseren Glieder, dem Producte der mittleren Glieder gleich.

BEWEIS.

Es sey die arithmetische Proportion $a \,.\, c = b \,.\, e$, so ist $a + e = b + c$. Denn, statt des nachfolgenden Gliedes beyder Verhältniſse, kann man das vorhergehende, zu dem Unterschiede addiret, schreiben; denn da die Verhältniſse gleich sind, so muſs auch in beyden der nähmliche Unterschied seyn. Die gegebene Proportion wird demnach auf folgende Art ausgedrückt $a \,.\, a + d = b \,.\, b + d$. In dieser Proportion, welche zugleich der allgemeine Ausdruck für die III. Folgerung ist, besteht die Summe der äuſseren Glieder in $a + b + d$, und der mittleren in $a + d + b$; nun aber sind diese zwey Summen gleich, also ist bey jeder arithmetischen Proportion die Summe der äuſseren Glieder, der Summe der mittleren gleich. So ist auch bey der Proportion $3 - 5 = 7 - 9$ die Summe der mittleren Glieder 12, der Summe der äuſseren Glieder 12 gleich. Es sey die geometrische Proportion $a : c = b : d$, so ist $ad = bc$. Denn vermöge der III. Folgerung wird die Proportion in diese verändert, welche zugleich der allgemeine Ausdruck der geometrischen Proportion ist, $a : aq = b : bq$. Denn da sie eine wahre Proportion ist, so müſsen die zwey Verhältnisse, folglich auch die Quotienten gleich seyn;

nun aber ist in dieser Proportion das Product der äuſseren Glieder abq dem Producte der mittleren abq gleich; also ist in jeder geometrischen Proportion das Product der äuſseren Glieder, dem Producte der mittleren gleich. So ist z. B. in dieser $3:6=4:8$ das Product der äuſseren Glieder 24, dem Producte der mittleren 24 gleich.

I. FOLGERUNG.

156. Wenn in der ersten Gleichung $a+e=b+c$ der Werth von e oder $b+d$ in dem ersten Gliede, und der Werth von c oder $a+d$ in dem zweyten Gliede an deren Stelle gesetzet wird, so erhält man auch gleiche Summen, nähmlich $a+b+d=b+a+d$; in der zweyten Gleichung $ad=bc$ ist bq der Werth von d, und aq der Werth von c; werden nun diese an deren Stelle gesetzt, so geben sie gleiche Producte, nähmlich $abq=baq$.

II. FOLGERUNG.

157. Da bey einer stätigen Proportion das zweyte Glied, als zwey Mahl gesetzt, schon verstanden wird, so ist bey der arithmetischen Proportion die Summe der äuſseren Glieder, nähmlich des ersten und dritten = dem mittleren Gliede, doppelt genommen; oder bey $\div\ a\,.\,b\,.\,c$ ist $a+c=2b$; und bey der geometrischen ist das Product der äuſseren Glieder = dem Quadrate des mittleren Gliedes; oder bey $\div\!\!\div a:b:c$ ist $ac=bb$. Denn, wenn man beyde Proportionen als viergliederige auflöset und darstellet, so wird aus der ersten $a\,.\,b=b\,.\,c$; also ist $a+c=2b$; aus der zweyten wird $a:b=b:c$, also ist $ac=bb$. In Zahlen ist bey $\div\ 3\,.\,7\,.\,11$ die Summe der äuſseren Glieder $14=$ dem doppelten des mittleren $7\times2=14$; und bey $\div\!\!\div 3:6:12$ ist das Product der äuſseren Glieder $36=$ dem Quadrate des mittleren Gliedes $6\times6=36$.

III. FOLGERUNG.

158. Hieraus läſst sich die Methode ableiten, jede

Proportion in eine Gleichung, und jede Gleichung in eine Proportion zu verändern. Denn man kann immer daraus entweder eine Summe, oder ein Product der äußeren und mittleren Glieder machen, und auf solche Art eine Gleichung haben. Und umgekehrt, wenn zwey Glieder einer Gleichung gegeben werden, so kann man beyde in zwey Glieder, welche die nähmliche Summe geben, oder in zwey Factoren, woraus diese gleichen Producte entstanden sind, auflösen. Z. B. aus der Gleichung $a+b=c+d$ kann man machen $a.c=d.b$; und aus $ab=cd$ kann werden $a:c=d:b$. Eben so aus $12=12$ läßt sich machen $3+9=5+7$, und hieraus $3.5=7.9$ arithmetisch; oder geometrisch in die Factoren aufgelöset $2\times6=3\times4$, und hieraus $2:4=3:6$. Aus diesem fließt der folgende

I. LEHRSATZ.

159. Aus den Factoren zweyer gleichen Producte kann man acht geometrische Proportionen machen, von denen jede eine gerade Proportion ist.

BEWEIS.

Zwey gleiche Producte machen eine Gleichung, welche nach dem vorhergehenden Lehrsatze in eine Proportion aufgelöset werden kann, indem man nähmlich das eine oder andere Product als ein äußeres, oder mittleres, und die Factoren als äußere oder mittlere Glieder betrachtet; nun aber kann jeder von den Factoren auf diese Art das erste, oder das letzte seyn, wenn man sie als äußere, und das zweyte oder dritte, wenn man sie als mittlere Glieder betrachtet, und dieß zwar acht Mahl, wie aus dem folgenden zu sehen ist; also kann man zwey gleiche Producte in acht Proportionen verändern, derer jede eine gerade ist. Das Ganze zeiget sich in dem nachstehenden Verzeichniſse.

$ad=bc$		$3\times8=4\times6$
$a:b=c:d$		$3:4=6:8$
$a:c=b:d$	durch Verwechselung	$3:6=4:8$
$d:b=c:a$		$8:4=6:3$
$d:c=b:a$		$8:6=4:3$
$b:a=d:c$	durch Verkehrung	$4:3=8:6$
$b:d=a:c$	durch Verwechselung	$4:8=3:6$
$c:a=d:b$		$6:3=8:4$
$c:d=a:b$		$6:8=3:4$

Bey allen diesen ist $ad=bc$, und $3\times8=4\times6$, und daher ist immer das Product der äuſseren Glieder dem Producte der mittleren gleich, folglich aus der gegebenen Gleichung eine gerade Proportion.

I. FOLGERUNG.

160. Wenn in einer Proportion die Factoren so gestellet werden, daſs sich der erste zum zweyten, wie der vierte zum dritten verhält, so ist es eine verkehrte Proportion, in welcher die Glieder wieder acht Mahl, wie vorher, verändert werden können, so zwar, daſs immer die nähmliche verkehrte Proportion bleibe, und das Product des ersten und dritten Gliedes, dem Producte des zweyten und vierten gleich sey, wie aus dem folgenden Verzeichniſse zu sehen ist.

$ad=bc$	$3\times8=4\times6$
$a:b=d:c$	$3:4=8:6$
$a:c=d:b$	$3:6=8:4$
$b:a=c:d$	$4:3=6:8$
$b:d=c:a$	$4:8=6:3$
$c:a=b:d$	$6:3=4:8$
$c:d=b:a$	$6:8=4:3$
$d:b=a:c$	$8:4=3:6$
$d:c=a:b$	$8:6=3:4$

Denn hier verhält sich überall das erste Glied zu dem zweyten, wie das vierte zu dem dritten; man wird aber doch eine wahre gerade Proportion haben, und das Product der äuſseren Glieder wird dem Producte der mittleren gleich seyn, wenn man die Glieder des zweyten Verhältniſses umkehret.

II. FOLGERUNG.

161. Man kann endlich die Factoren so stellen, daſs sie gar keine, weder eine gerade, noch verkehrte Proportion ausmachen, wenn man nähmlich unter den Factoren selbst beyder Producte ein Verhältniſs annimmt, und diese Verhältniſse in eine Gleichung bringet; dadurch erhält man acht verschiedene Veränderungen, aber ohne Proportion, wie aus dem folgenden erhellet.

$ad = bc$	$3 \times 8 = 4 \times 6$
$a : d = b : c$	$3 : 8 = 4 : 6$
$a : d = c : b$	$3 : 8 = 6 : 4$
$b : c = a : d$	$4 : 6 = 3 : 8$
$b : c = d : a$	$4 : 6 = 8 : 3$
$c : b = a : d$	$6 : 4 = 3 : 8$
$c : b = d : a$	$6 : 4 = 8 : 3$
$d : a = b : c$	$8 : 3 = 4 : 6$
$d : a = c : b$	$8 : 3 = 6 : 4$

In diesem Falle sind die Producte keineswegs gleich, wenn nicht die Glieder eines jeden Verhältniſses mit einander multipliciret werden, welches wider die Erklärung einer Proportion ist. So wird auch das erste Verhältniſs niemahls dem zweyten gleich seyn, man mag die Glieder des zweyten setzen, wie man will, welches abermahl der Erklärung einer Proportion widerspricht, indem diese die Vergleichung gleicher Verhältniſse ist.

III. FOLGERUNG.

162. Da gleiche Verhältniſse, sie mögen durch gleiche Gröſsen vermehret oder vermindert werden, dennoch

gleiche Verhältnisse bleiben (§. 147.), so lassen sich noch mehrere Veränderungen machen, ohne dass die Proportion selbst verändert wird, wenn man nähmlich die vorhergehenden durch die nachfolgenden, oder die nachfolgenden durch die vorhergehenden vermehret, oder vermindert; kurz, es können so viele Veränderungen werden, als durch die Multiplication der äusseren und mittleren Glieder gleiche Producte entstehen.

$$\left.\begin{array}{l} a+b : b = c+d : d \\ a+a : b = c+c : d \\ a : a+b = c : c+d \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{durch Zu-}\\ \text{sammensetzung.}\end{array} \left\{\begin{array}{l} 3+4 : 4 = 6+8 : 8 \\ 3+3 : 4 = 6+6 : 8 \\ 3 : 3+4 = 6 : 6+8 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} a : b-a = c : d-c \\ d-b : b = c-a : a \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{durch}\\ \text{Zertheilung}\end{array} \left\{\begin{array}{l} 3 : 4-3 = 6 : 8-6 \\ 8-4 : 4 = 6-3 : 3 \end{array}\right.$$

$$d+b : d-b = c+a : c-a. \qquad 8+4 : 8-4 = 6+3 : 6-3$$

ANMERKUNG.

163. Es ist wohl zu merken, was von der Veränderung einer Gleichung in eine Proportion, und umgekehrt, gesagt worden ist, indem es durch die ganze Mathematik von sehr grossem Nutzen ist. Daher muss man immer wohl unterscheiden, was für Factoren jedes Product haben könne, um darnach die Glieder der Proportion zu bilden. Scheint es nur eine einzige Grösse zu seyn, so kann der andere Factor immer eine Einheit seyn, und da diese nichts multipliciret, so kann sie immer für den anderen Factor angenommen werden. So hat z. B. x die Factoren x und 1, also hat die Gleichung $x = cd$ die Factoren $x \times 1 = c \times d$, und hieraus wird die Proportion $x : c = d : 1$ oder $1 : c = d : x$. Ist das Product eine zusammenhängende Grösse, und kommt in jedem Gliede der nähmliche Buchstab vor, so sind dieser Buchstab und die zusammenhängende Grösse die Factoren; z. B. $nd - d = ag - bg$ gibt die Factoren $(n-1)\, d = (a-b)\, g$, und die Proportion $n-1 : a-b = g : d$. Ferner $1 - xx = a$ gibt die Factoren $1-x \times 1+x = a \times 1$ und die Proportion $1-x : a = 1 : 1+x$. So auch $xx - yy = 1$ gibt $x-y : 1 = 1 : x+y$ oder stätig $∺ x-y : 1 : x+y$.

FOLGERUNG.

164. Da auch die Brüche Verhältnisse sind, so kann man alle gleichen Brüche in eine Proportion auflösen, entweder in eine gerade, indem man sagt: wie sich der Nenner zu seinem Zähler verhält, so verhält sich auch der andere Nenner zu seinem Zähler, oder wie sich der eine Zähler zu seinem Nenner verhält, so verhält sich der andere Zähler zu seinem Nenner; oder in eine verkehrte, indem man sagt: wie sich der Nenner zu seinem Zähler verhält, so verhält sich der andere Zähler zu seinem Nenner, und umgekehrt. Aus $\frac{3}{9}$ und $\frac{6}{18}$ wird entweder eine gerade $9 : 3 = 18 : 6$ oder $3 : 9 = 6 : 18$ oder eine verkehrte, keine wahre Proportion $9 : 3 = 6 : 18$ oder $3 : 9 = 18 : 6$. Haben die Brüche den nähmlichen Zähler, aber verschiedene Nenner, so sind sie im verkehrten Verhältnisse der Nenner; das heisst, der erste Bruch verhält sich zu dem zweyten, wie der Nenner des zweyten Bruches zu dem Nenner des ersten.

Z. B. $\frac{a}{b} : \frac{a}{d} = d : b$ und $\frac{3}{4} : \frac{3}{5} = 5 : 4$. Diess erhellet daraus, weil das Product der äusseren Glieder $\frac{ab}{b}$ und $\frac{3 \times 4}{4} =$ dem Producte der mittleren $\frac{ad}{d}$ und $\frac{3 \times 5}{5}$ das ist $a = a$ und $3 = 3$. Sind aber die Nenner gleich und die Zähler verschieden, so verhalten sich die Brüche, wie die Zähler; z. B. $\frac{a}{d} : \frac{c}{d} = a : c$ und $\frac{3}{5} : \frac{2}{5} = 3 : 2$. Denn das Product der mittleren Glieder ist überall dem Producte der äusseren gleich $\frac{ac}{d} = \frac{ac}{d}$ und $\frac{6}{5} = \frac{6}{5}$.

II. LEHRSATZ.

165. Wenn man die Glieder der einen Proportion mit den übereinstimmenden Gliedern der andern Proportion, das ist,

das erste Glied mit dem ersten, das zweyte mit dem zweyten u. s. w. multipliciret oder dividiret; so werden auch die Producte oder Quotienten in einem Verhältnifse stehen.

BEWEIS.

Nimmt man $a : b = c : d$
und $e : f = g : h$

so ist auch $ae : bf = cg : dh$. Ist nun in der ersten Proportion der Quotient $= q$, in der zweyten der Quotient $= p$, so entstehet, vermöge der III. Folgerung, aus der ersten Proportion die folgende

	$a : aq = c : cq$	$2 : 4 = 3 : 6$
und die zweyte	$e : ep = g : gp$	$3 : 9 = 5 : 15$
zusammen gesetzt	$ae : aeqp = cg : cgqp$.	$6 : 36 = 15 : 90$.

Nun aber sind diese zwey Verhältnifse gleich, weil in beyden der Quotient qp ist; gleiche Verhältnifse aber geben eine Proportion; also machen Proportionen, die mit einander multipliciret werden, wieder eine Proportion. Was nun hier von zweyen bewiesen worden ist, das kann auch für mehrere gelten.

I. FOLGERUNG.

166. Wenn man demnach alle Glieder einer Proportion mit der nähmlichen Gröfse multipliciret oder dividiret; oder wenn man die zwey vorhergehenden mit der einen, und die zwey nachfolgenden mit der andern Gröfse multipliciret oder dividiret, so bleiben die auf solche Art vermehrten oder verminderten Glieder immer verhältnifsmäfsig. Denn, werden die Glieder, wie vorher, aufgelöset, so ist immer das Pro-

duct der äuſseren Glieder dem Producte der mittleren gleich, und daher eine wahre Proportion.

II. FOLGERUNG.

167. Da bey arithmetischen Proportionen eben das durch die Addition geschieht, was bey geometrischen durch die Multiplication bewirket wird, so bleiben, wenn man zwey arithmetiſche Proportionen verhältniſsmäſsig addiret, die Summen verhältniſsmäſsig, oder wenn man sie subtrahiret, so sind die Unterschiede verhältniſsmäſsig. Z. B. der Unterschied in der ersten ist $=d$, in der zweyten $=x$.

$$\begin{array}{c}a\,.\,a+d=b\,.\,b+d\\ c\,.\,c+x=e\,.\,e+x\\ \hline a+c\,.\,a+c+d+x=b+e\,.\,b+e+d+x\end{array}\qquad\begin{array}{c}3\cdot 5=7\cdot 9\\ 2\cdot 3=4\cdot 5\\ \hline 5\cdot 8=11\,.\,14\end{array}$$

III. FOLGERUNG.

168. Wenn also gleiche Proportionen mit einander multipliciret werden, so bleiben auch die Producte, vermöge der oben geführten Beweise verhältniſsmäſsig. Sind nun drey oder wie viel immer solche multiplicirende Proportionen, so sind jedes Mahl die Producte (sie seyn ein Kubus oder was immer für eine Würde oder Potenz) verhältniſsmäſsig; also gibt die Proportion $a:b=c:d$, wenn sie mit sich selbst multipliciret wird, wieder eine zusammengesetzte Proportion.

$$\begin{array}{c}a:b=c:d\\ a:b=c:d\\ \hline a^2:b^2=c^2:d^2\end{array}$$

Die Proportion aber, welche multipliciret wird, sind die Wurzeln; und das Product sind die Quadrate dieser Wurzeln; sind also die Wurzeln verhältniſsmäſsig, so sind es auch die Quadrate, welches durch folgenden Lehrsatz ausgedrückt wird.

Die Würden verhältniſsmäſsiger Wurzeln sind verhältniſsmäſsig.

III. LEHRSATZ.

169. Wenn bey zwey unter einander geschriebenen Proportionen, in welchen zwey Glieder der obern, zweyen Gliedern der untern gleich sind, gleichlaufende Linien zu ungleichen Gliedern gezogen werden, so stehen diese Glieder in gerader Proportion.

$$\begin{array}{ccccccccc} a & : & b & = & c & : & d & & \\ & \diagdown & & & & \diagdown & & & \\ & & b & : m = & & & d & : n & \end{array}$$

und dann ist $a : m = c : n$. Denn aus der ersten Proportion kann durch Verwechselung $a : c = b : d$ werden, und aus der zweyten $b : d = m : n$; da also $a : c$ und $m : n$ dem dritten Verhältnifse $b : d$ gleich sind, so werden auch $a : c = m : n$ oder $a : m = c : n$ unter sich gleich seyn. Und dieses ist, was zu beweisen war.

IV. LEHRSATZ.

170. Wenn bey zwey unter einander geschriebenen Proportionen, in welchen zwey Glieder der obern, zweyen Gliedern der untern gleich sind, zusammenlaufende Linien zu ungleichen Gliedern gezogen werden, so stehen diese Glieder verkehrt in der Proportion.

$$\begin{array}{ccccccc} a & : & b & = & c & : & d \\ & \diagdown & & & & \diagup & \\ & & b & : m = & n & : c & \end{array}$$

und dann ist $a : m = n : d$; denn in der ersten

Proportion ist $ad = bc$, und in der zweyten $mn = bc$, also $ad = mn$; löset man die Gleichung in eine Proportion auf, so ist $a : m = n : d$. Was zu beweisen war.

V. LEHRSATZ.

171. Wenn in zwey Proportionen die ersten vorhergehenden, und die letzten nachfolgenden Glieder, oder umgekehrt, gleich sind, so stehen die übrigen Glieder im verkehrten Verhältnifse.

Wenn $a : b = c : d$
$a : m = n : d$
so wird $b : m = n : c$

Denn $ad = bc$ und auch $mn = ad$, also $bc = mn$. Wird diese Gleichung aufgelöset, so erhält man die Proportion $b : m = n : c$.

VI. LEHRSATZ.

172. Wenn in zwey Proportionen beyde vorhergehenden oder beyde nachfolgenden Glieder gleich sind, so stehen die übrigen Glieder in gerader Proportion.

Wenn $a : b = c : d$
$a : m = c : n$
so ist $b : m = d : n$

Denn durch Verwechselung ist $a : c = b : d$ und $a : c = m : n$; also ist auch gerade $b : m = d : n$.

VII. LEHRSATZ.

173. Sind mehrere gleiche Verhältnifse, deren eines auf das andere folget,

oder sind mehrere verhältnißmäßige Glieder, so verhält sich die Summe aller vorhergehenden Glieder zur Summe aller nachfolgenden, wie jedes vorhergehende Glied zu seinem nachfolgenden.

Es sey $a : b = c : d = e : f = g : h$ u. s. w. so kann man diese Verhältniße in folgende verändern.

$$a : aq = c : cq = e : eq = g : gq$$

Die Summe der vorhergehenden ist $a + c + e + g$. Die Summe der nachfolgenden $aq + cq + eq + gq$. Daher ist $a + c + e + g : aq + cq + eq + gq = a : aq$; das ist $a + c + e + g : (a + c + e + g)\, q = a : aq$. Durch die Multiplication der mittleren Glieder erhält man $(a + c + e + g)\, aq$; und durch die Multiplication der äußeren wird $(a + c + e + g)\, aq$.

Nun aber sind diese Producte gleich, und wo das Product der äußeren Glieder, dem Producte der mittleren gleich ist, da ist eine wahre Proportion; also verhält sich die Summe der vorhergehenden Glieder zur Summe der nachfolgenden, wie jedes vorhergehende Glied zu seinem nachfolgenden.

I. AUFGABE.

174. Wenn drey Glieder einer Proportion gegeben werden, das vierte finden, welches auf was immer für eine Stelle gesetzt werden kann.

AUFLÖSUNG.

Man nennet das unbekannte Glied x, und setztet es an die Stelle des zu suchenden Gliedes; aus der Proportion wird eine Gleichung, entweder durch die Addition der äußeren Glieder bey einer arithmetischen, oder durch die Multiplication bey einer geometrischen; dann suchet man x mittels der Gleichungsregeln.

$a \,.\, b = c \,.\, x$ wird $a + x = b + c$ und $x = b + c - a$

$a \,.\, b = x \,.\, c$ wird $a + c = b + x$ und $x = a + c - b$

$a \,.\, x = b \,.\, c$ wird $a + c = x + b$ und $x = a + c - b$

$x \,.\, a = b \,.\, c$ wird $x + c = a + b$ und $x = a + b - c$

$a : b = c : x$ wird $ax = bc$ und $x = \frac{bc}{a}$

$a : b = x : c$ wird $ac = bx$ und $x = \frac{ac}{b}$

$a : x = b : c$ wird $ac = xb$ und $x = \frac{ac}{b}$

$x : a = b : c$ wird $xc = ab$ und $x = \frac{ab}{c}$.

BEWEIS.

Jede Proportion läſst sich in eine Gleichung verändern (§. 157.), in welcher man mittels der Versetzung den Werth von x findet (§. 111.).

II. AUFGABE.

175. Wenn in einer stätigen Proportion zwey Glieder gegeben werden, das mittlere oder dritte finden.

AUFLÖSUNG.

Das unbekannte Glied nennet man, wie vorher x, und setzet es an die Stelle des zu suchenden Gliedes; dann machet man eine Gleichung und suchet den Werth der Gröſse x.

$\div\; a \,.\, b \,.\, x$ wird $a+x=2b$ und $x=2b-a$

$\div\; a \,.\, x \,.\, b$ wird $a+b=2x$ und $x=\frac{a+b}{2}$

$\ddot{\div}\; a : b : x$ wird $ax=bb$ und $x=\frac{bb}{a}$

$\ddot{\div}\; a : x : b$ wird $ab=xx$ und $x=\sqrt{ab}$.

Der Beweis ist der nähmliche, wie der vorhergehende.

ANMERKUNG.

176. Diese Methode, zu drey gegebenen Gliedern das vierte zu finden, nennet man die *Dreysatzregel* (Regel de Tri), welche im gemeinen Leben von sehr grofsem Nutzen ist; daher sie auch den Nahmen *goldene Regel* erhalten hat. Von der praktischen Anwendung derselben wird in dem folgenden Hauptstücke gehandelt.

IX. HAUPTSTÜCK.

VON DER GOLDENEN REGEL.

I. ERKLÄRUNG.

177. Die *goldene Regel* oder *Proportionregel* ist die Methode, zu drey gegebenen Gliedern das vierte zu finden, oder zu einem gegebenen vorhergehenden Gliede ein solches nachfolgendes zu finden, dafs dieses zweyte Verhältnifs dem vorigen gleich sey, und also eine Proportion ausmache. Man verstehet aber hier immer eine geometrische Proportion und ein solches Verhältnifs.

FOLGERUNG.

178. Was also von dem geometrischen Verhältnifse und dieser Proportion gesagt worden ist, das läfst sich auch auf die goldene Regel anwenden. Diese ist entweder einfach, wenn man zu drey Gliedern das vierte suchet, und nur zwey Verhältnifse gegeben werden; oder sie ist zusammengesetzt, wenn man zu fünf Gliedern das sechste, oder zu sieben das achte suchet, und also drey oder vier Verhältnifse gegeben werden. Sie ist eine gerade, wenn sich das erste Glied zu dem zweyten, wie das dritte zu dem zu suchenden verhält. Eine verkehrte, wenn sich das erste zu dem zweyten, wie verkehrt das zu suchende vierte zu dem gegebenen dritten verhält. Die gehörige Ordnung der Glieder wird immer eine gerade geben.

ANMERKUNG.

179. Bey jeder Aufgabe der goldenen Regel sind immer zwey Voraussetzungen oder Hypothesen: eine nimmt etwas als geschehen, oder gegeben an; die andere stellet dasjenige, was geschehen oder untersucht werden soll, jedoch verhältnifsmäfsig zur ersten, vor; z. B. es wird gegeben, dafs vier Studenten in einem Monathe 19 Gulden ausgeben; dann wird gefragt, wie viel 12 Studenten ausgeben? Oder es wird gegeben, dafs 3 Ellen Tuch um 7 Gulden gekauft worden sind, und dann wird gefragt, wie viel Ellen man um 21 Gulden kaufen könne? oder es wird vorausgesetzt, dafs 12 Arbeiter in einem Tage 24 Klafter graben, und dann wird gefragt, wie viel Klafter 50 Arbeiter graben werden?

FOLGERUNG.

180. Hieraus erhellet, dafs von vier Gliedern immer zwey von gleicher Art oder Benennung sind, und dafs auch die übrigen zwey unter sich die nähmliche, doch eine von der vorhergehenden verschiedene Benennung haben, wie die vorigen drey Beyspiele zeigen. In dem ersten Beyspiele ge-

gehören zwey Glieder zu den Studenten, zwey zu den Gulden; in dem zweyten gehören zwey zur Waare, zwey zum Preise; in dem dritten zwey zu den Arbeitern, zwey zu den Klaftern.

ANMERKUNG.

181. Ist die goldene Regel zusammengesetzt, so sind noch wenigstens zwey andere Glieder vorhanden, welche unter sich die nähmliche, doch eine von den vorhergehenden verschiedene Benennung haben, und zugleich voraussetzen, daſs dasjenige, was sie bezeichnen, geschehen oder gegeben ist; z. B. wenn in dem dritten Beyspiele hinzugesetzt würde, wie viel Klafter die 50 Arbeiter in 8 Tagen graben werden.

I. AUFGABE.

182. In der einfachen goldenen Regel zu drey gegebenen Gliedern das verhältniſsmäſsige vierte finden.

AUFLÖSUNG.

I. Das Glied, welches mit dem vierten zu suchenden gleiche Benennung hat, wird auf die dritte Stelle gesetzt; die übrigen zwey aber, welche unter sich gleiche Benennung haben, werden für die ersten zwey Stellen aufbehalten.

II. Man untersuchet, ob, nach der Bedingung der Aufgabe, das vierte Glied gröſser oder kleiner seyn müſse; als das dritte; dann setzet man die ersten zwey Zahlen in dem nähmlichen Verhältniſse, daſs sich immer das erste Glied zu dem zweyten, wie das dritte zu dem vierten verhalte.

III. Man multipliciret das zweyte und dritte Glied mit einander, und dividiret das Product mit dem ersten; dann ist der Quotient das vierte.

BEWEIS.

Die durch diese Glieder bezeichneten Gegenstände sind verhältnifsmäfsig; so lehret uns die tägliche Erfahrung, dafs die Waaren mit dem Preise, die Personen mit der Arbeit, die Ausgaben mit der Zeit u. s. f. im Verhältnifse stehen; wenn also in einem bestimmten Verhältnifse das eine vermehret oder vermindert wird, so mufs auch nothwendig das andere in gleichem Verhältnifse vermehret oder vermindert werden; nimmt man demnach bey der Waare z. B. für die ersten zwey Glieder ein steigendes oder fallendes Verhältnifs an, so mufs auch das Verhältnifs des Preises bey den andern zwey Gliedern steigen oder fallen. Nun aber, durch die Multiplication des zweyten und dritten Gliedes, und durch die Division des Productes mit dem ersten, erhält man gleiches Verhältnifs, und gleiche Proportion unter diesen vier Gliedern; also wird, nach den vorerwähnten Regeln, das verhältnifsmäfsige vierte Glied gefunden.

I. *Beysp.* Bey 4 Studenten betragen die Ausgaben in einem Monathe 19 Gulden; wie viel Gulden werden die Ausgaben bey 12 Studenten betragen?

Antw. Die Gröfse der Gulden wird auf die dritte Stelle gesetzet, indem Gulden gesuchet werden. Und weil 12 Studenten mehr ausgeben, als 4 Studenten, so mufs die zu suchende Zahl der Gulden gröfser werden, als die gegebene Zahl 19 ist. Daher mufs auch das zweyte Glied gröfser seyn, als das erste. Denn gleichwie sich die wenigeren Studenten 4, zu den mehreren 12 verhalten, so verhalten sich die 19 Gulden, welche von den ersten gezahlet werden, zu den mehreren Gulden, die von den letzteren zu zahlen sind.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{St.} & & \text{St.} & & \text{Gl.} & & \text{Gl.} \\ 4 & : & 12 & = & 19 & : & x \end{array}$$

Werden nun die mittleren Glieder miteinander multipliciret 12×19, und wird das Product 228 mit dem ersten Gliede 4 dividiret, so erhält man 57 Gulden, welche von 12 Studenten in einem Monathe zu zahlen sind.

I. ANMERKUNG.

183. Da bey jeder gehörig gestellten Proportion das Product der äußeren Glieder dem Producte der mittleren gleich seyn muß, so muß auch hier, wenn das vierte gefundene Glied zu den übrigen verhältnißmäßig ist, das Product der äußeren Glieder dem Producte der mittleren gleich seyn. Die Probe, daß die Aufgabe richtig gelöset sey, wird demnach seyn, wenn das erste mit dem gefundenen vierten multiplicirte Glied das nähmliche Product gibt, wie das zweyte mit dem dritten multiplicirte Glied. Man kann die Probe noch auf eine andere Art machen: man läßt nähmlich eines von den drey zuerst gegebenen Gliedern, z. B. in dem obigen Falle, 19 Gulden weg, nimmt dafür das neu gefundene, das ist, 57 Gulden, und suchet die 19 Gulden durch Stellung einer neuen Frage, nähmlich: wenn 12 Studenten in einem Monathe 57 Gulden ausgeben; wie viel werden die Ausgaben bey 4 Studenten betragen? Auf den dritten Platz kommt also wieder dasjenige Glied, welches seinen Gespann sucht, nähmlich in diesem Falle 57; und nun wird gefragt, ob das vierte Glied x größer oder kleiner ausfallen werde, als das dritte? Nothwendig wird das vierte jetzt kleiner werden; also steht die neue Proportion: *groß* zu *klein*, wie *groß* zu *klein*, das ist

$$\begin{array}{ccccccc} \text{St.} & & \text{St.} & & \text{Gl.} & & \text{Gl.} \\ 12 & : & 4 & = & 57 & : & x \end{array}$$

Nach geschehener Berechnung muß dann die Zahl 19 wieder erscheinen.

II. *Beysp.* Drey Ellen Tuch kosten 7 Gulden; wie viel Ellen Tuch bekommt man um 21 Gulden?

Antw. Da man um 21 Gulden mehr Tuch bekommt, als um 7 Gulden, so muſs das vierte Glied, nähmlich die Zahl der Ellen gröſser seyn; daher ist auch das zweyte Glied gröſser als das erste. Also steht die Proportion: *klein* zu *groſs*, wie *klein* zu *groſs*, d. i.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Gl.} & & \text{Gl.} & & \text{Ell.} & & \text{Ell.} \\ 7 & : & 21 & = & 3 & : & x \end{array}$$

Durch die Multiplication wird $21 \times 3 = 63$ und durch die Division mit 7, $=9$ Ellen.

III. *Beysp.* 30 Arbeiter graben 24 Klafter; wie viel Klafter werden 50 Arbeiter graben?

Antw. Da 50 Arbeiter mehrere Klaftern graben, als 30 Arbeiter, so muſs das vierte Glied gröſser werden, als 24; daher muſs auch das zweyte gröſser seyn, als das erste.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ar.} & & \text{Ar.} & & \text{Kl.} & & \text{Kl.} \\ 30 & : & 50 & = & 24 & : & x \end{array}$$

Das vierte Glied findet man $\dfrac{24 \times 50}{30} = 40$.

IV. *Beysp.* 8 Schnitter vollenden eine Arbeit auf dem Felde in 12 Tagen; nimmt man nun 24 Schnitter, in wie viel Tagen werden diese die Arbeit vollenden?

Antw. Da mehrere Schnitter nicht so viel Tage brauchen, als wenigere Schnitter, so muſs das vierte Glied kleiner werden, als 12; folglich muſs auch das zweyte kleiner seyn, als das erste.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Sch.} & & \text{Sch.} & & \text{T.} & & \text{T.} \\ 24 & : & 8 & = & 12 & : & x \end{array}$$

Das vierte Glied wird seyn $\dfrac{8 \times 12}{24} = 4$.

V. *Beysp.* Für 24 Soldaten ist der Mundvorrath in einem Schloſse auf 30 Tage hinreichend; auf wie viel Tage wird er hinreichend seyn, wenn man die Anzahl der Soldaten auf 40 erhöhet?

Antw. Da der Mundvorrath für mehrere Soldaten nicht so lange hinreichet, so muſs das vierte Glied kleiner werden, als das dritte, folglich auch das zweyte kleiner, als das erste.

$$40 : 24 = 30 : x$$

Nach vollendeter Berechnung sind die gefundenen Tage 18.

VI. *Beysp.* Ein Buchdrucker setzet auf eine Seite 24 Zeilen, und füllet so 70 Seiten an; wie viel Seiten würde er anfüllen, wenn er 30 Zeilen auf jede Seite setzte?

Antw. Gewiſs weniger als 70; also steht die Proportion:

$$30 : 24 = 70 : x$$

Nach geschehener Berechnung wird man haben $\frac{24 \times 70}{30} =$ 56 Seiten.

II. ANMERKUNG.

184. Sind ungleichnahmige Theile, oder gemischte Zahlen vorhanden, so muſs man die ersteren zu der kleinsten Art, und die letzteren zu einfachen Brüchen reduciren; z. B. $3\frac{3}{4}$ Ellen kosten 19 Gulden, 30 Kreuzer. Was kostet 1 Elle?

Man machet $\frac{15}{4} : \frac{1170}{1} = \frac{1}{1} : x$. Das vierte Glied ist 312 Kreuzer, oder 5 Gulden 12 Kreuzer.

III. ANMERKUNG.

185. Hieher gehöret auch die Methode, jeden Bruch in einen anderen, wozu der Nenner gegeben wird, ohne Veränderung des Werthes zu verändern, oder den Werth eines jeden Bruches in den einzelnen Theilen des Ganzen, es sey nun Münze, oder Maſs, oder von einer andern Benennung, zu finden. Denn, da jeder Bruch ein Verhältniſs ist (§. 136.), so können zwey gleiche Brüche in eine Proportion aufgelöset werden, so zwar, daſs sich der Nenner des einen zu seinem Zähler, wie der Nenner des andern zu seinem Zähler verhalte; der gegebene neue Nenner wird

also das dritte Glied seyn, zu welchem man einen Zähler suchet; der gegebene Nenner und Zähler aber werden die ersten Glieder seyn. Will man wissen, wie viel $\frac{3}{4}$ von einem Gulden an Kreuzern oder Sechzigsttheilen betragen; so muss man zu dem Nenner 60 den Zähler suchen und sagen $4 : 3 = 60 : 45$, und $\frac{45}{60}$ ist gleich $\frac{3}{4}$. So auch, wenn man $\frac{2}{3}$ Schuh an Zollen oder Zwölftheilen haben will, machet man $3 : 2 = 12 : 8$, und 8 Zoll sind $\frac{2}{3}$ Schuh.

II. AUFGABE.

186. In der zusammengesetzten goldenen Regel, zu fünf oder sieben gegebenen Gliedern das verhältnissmässige sechste oder achte Glied finden.

AUFLÖSUNG.

I. *Reg.* Das Glied, welches mit dem zu suchenden gleiche Benennung hat, wird auf die dritte Stelle gesetzet.

II. Diejenigen zwey Glieder, welche unter sich von gleicher Benennung sind, kommen auf die erste und zweyte Stelle; die übrigen werden indessen ausser Acht gelassen, und so betrachtet, als wären sie nicht vorhanden; und nun suchet man mit jenen drey Gliedern, nach der oben gegebenen Regel, und der dabey gemachten Bemerkung, das vierte Glied.

III. Das gefundene vierte Glied kommt nun in der neuen Regel auf die dritte Stelle, und die zwey vorher übergangenen Zahlen von gleicher Benennung kommen, nach der oben gegebenen Anweisung, auf die erste und zweyte Stelle; dann multipliciret man die mittleren Glieder, und dividiret das Product mit dem ersten, und so erhält man das gesuchte vierte.

IV. Dieses kommt wieder auf die dritte Stelle, und die zwey noch übrigen, vorher ebenfalls übergangenen Glieder, die zwar unter sich eine gleiche, doch von den vorigen verschiedene Benennung haben, kommen, nach der gegebenen Anweisung, auf die erste und zweyte Stelle; dann wird nach den Regeln das vierte Glied gesucht.

BEWEIS.

Die ganze Auflösung geschieht mittels der zwey oder drey Mahl angewandten goldenen Regel, also läſst sich der nähmliche Beweis, welcher von einer gegeben worden ist, auch auf die zwey oder drey Mahl wiederhohlten leicht anwenden.

I. *Beysp.* 8 Pferde werden mit 9 Säcken Haber durch 12 Tage gefüttert; nimmt man 16 Pferde, und zu ihrer Verpflegung 24 Säcke, auf wie viel Tage werden diese hinreichen?

Antw. Die 12 Tage behaupten die dritte Stelle. Für die erste und zweyte Stelle kann man zuerst die Pferde nehmen; die Säcke werden indeſs übergangen. Nun fragt man, ob die nähmliche Portion, die für 8 Pferde auf 12 Tage hinreicht, für 16 Pferde auf eine längere oder kürzere Zeit hinreichen werde? allerdings auf eine kürzere; also ist das vierte Glied kleiner als das dritte, und das zweyte kleiner als das erste.

Pf.		Pf.		T.		T.
16	:	8	=	12	:	6

Das gefundene Glied 6 kommt nun auf die dritte Stelle, und für das erste und zweyte Glied werden die Säcke genommen, ohne die Pferde ins besondere in Betrachtung zu ziehen. Dann fraget man, ob den nähmlichen Pferden, denen 9 Säcke auf 6 Tage hinreichen, 24 Säcke auf eine längere oder kürzere Zeit hinreichen werden? aufser Zweifel auf eine längere; also ist das vierte Glied gröfser, als das dritte, und das zweyte gröfser, als das erste; und die Proportion steht: *klein* zu *grofs*, wie *klein* zu *grofs*, das ist:

$$\begin{array}{ccccccc} S. & & S. & & T. & & T. \\ 9 & : & 24 & = & 6 & : & 16. \end{array}$$

Also sind 24 Säcke für 16 Pferde auf 16 Tage hinreichend.

II. *Beysp.* 4 Arbeiter bauen in 3 Tagen 5 Klafter, wie viel Klafter werden 5 Arbeiter in 7 Tagen bauen?

$$\begin{array}{ccccccc} A. & & A. & & Kl. & & Kl. \\ 4 & : & 5 & = & 5 & : & x \\ T. & & T. & & & & \\ 3 & : & 7 & = & x & : & \end{array}$$

Das erste x findet man $5 \times 5 = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$; dann in der zweyten Regel $\frac{25}{4} \times 7 : 3 = 14\frac{7}{12}$; also bauen 5 Arbeiter in 7 Tagen $14\frac{7}{12}$ Klafter.

III. *Beysp.* Ein Kapital von 3550 Gulden gibt 1420 Zinse in 10 Jahren; wie viel Zinse wird ein Kapital von 50000 Gulden in 20 Jahren geben?

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Kap.} & & \text{Kap.} & & \text{Zins.} & & \\ 3550 & : & 50000 & = & 1420 & : & x \\ \text{Jahr.} & & \text{Jahr.} & & & & \\ 10 & : & 20 & = & x & & \end{array}$$

Das gefundene erste $x = 20000$; dieses Glied, in der zweyten Proportion auf die dritte Stelle gesetzt, gibt das vierte Glied in folgender Proportion $10 : 20 = 20000 : 40000$; also betragen die Zinse in 20 Jahren 40000 Gulden.

ANMERKUNG.

187. Aus dem, was hier von dem Kapital und den jährlichen Zinsen gesagt worden ist, kann man, wenn es

algebraisch ausgedrückt wird, eine allgemeine Formel für jeden Zins von was immer für einem Kapital, sogar auf die einzelnen Tage des Jahres ableiten. Da der Zins eines jeden Kapitals in Beziehung auf den Zins, den man von hundert Gulden geniesset, berechnet wird, so muſs die erste Proportion also lauten: wie sich hundert Gulden Kapital zu seinem Zinse verhält, so verhält sich das gegebene Kapital zu seinem Zinse; dann die zweyte Proportion: wie sich ein Jahr (oder 360 Tage) zu den Tagen, für welche der Zins gesucht wird, verhält, so verhält sich der vorher gefundene Zins zu dem in der Frage stehenden, welcher auf die gegebenen Tage fällt. Es sey der Zins von 100 Gulden $=J$; das gegebene Kapital $=K$; die gegebenen Tage $=T$; so ist die erste Proportion

$$100 : J = K : \frac{JK}{100} \text{ dann}$$

$$360 : T = \frac{JK}{100} : \frac{JKT}{36000}$$

Wo es aber schon angenommen ist, daſs man von 100 den Zins 4 erhält, so kann man 4 statt J setzen, und dann ist die allgemeine Formel $\frac{4KT}{36000}$, oder wenn dieser Bruch zu kleineren Ausdrücken reduciret wird $= \frac{KT}{9000}$ das ist: *man multipliciret das Kapital mit den gegebenen Tagen, und dividiret das Product mit* 9000; dann ist der Quotient der verlangte Zins. Will man den Werth in Kreuzern haben, so ist der Zähler mit 60 zu multipliciren (§. 185.), und dann wird die Formel $\frac{KT}{9000}$ in $\frac{60KT}{9000}$ verändert; dieses, zu kleineren Ausdrücken reduciret, gibt $\frac{2KT}{300}$, das ist: *man multipliciret das Kapital mit dem doppelten Betrage der Tage, und dividiret das Product mit* 300; dann ist der Quotient der Zins in Kreuzern. Auf ein Jahr werden 360, auf einen Monath 30 Tage gerechnet. Wenn also gefragt wird, wie viel Zinse ein Kapital von 6000 Gulden in 6 Tagen abwirft, so schreibet man, vermöge der ersten Formel,

$$\frac{6000 \times 6}{9000} = 4 \text{ Gulden.}$$

Was für einen Zins geben 1500 Gulden in 9 Tagen? Man schreibet also vermöge der zweyten Formel $\frac{1500 \times 18}{300}$

$$= \frac{27000}{300} = 90 \text{ Kreuzern} = 1 \text{ Gulden } 30 \text{ Kreuzern.}$$

350 Gulden in 8 Tagen? Man schreibet also $\frac{350 \times 16}{300}$

$$= \frac{5600}{300} = 18\tfrac{2}{3} \text{ Kreuzern.}$$

Ist der Jahrzins von 100 Gulden 1, 2, 3 Gulden u. s. w. oder $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ Gulden u. s. w. so setzet man diese Gröſse in der Formel statt J, und auf solche Art kann man in allen möglichen Fällen verfahren.

IV. *Beysp.* 3 Personen, die täglich 7 Stunden arbeiten, bauen in 2 Tagen 84 Klafter; wie viel Klafter werden 5 Personen in drey Tagen zu Stande bringen, wenn sie täglich 4 Stunden arbeiten?

Antw. In der ersten Proportion nimmt man die Personen mit Übergehung der andern Bedingungen. Mehrere arbeiten mehr; also

$$\begin{array}{cccc} \text{P.} & \text{P.} & \text{Kl.} & \text{Kl.} \\ 3 : 5 & = 84 : x & = 140. \end{array}$$

In der zweyten Proportion werden die Tage genommen. In drey Tagen geschieht mehr, als in zwey Tagen; also

$$\begin{array}{cccc} \text{T.} & \text{T.} & \text{Kl.} & \text{Kl.} \\ 2 : 3 & = 140 : x & = 210. \end{array}$$

In der dritten Proportion kommen die Stunden in Betrachtung. In 4 Stunden geschieht weniger, als in 7 Stunden; also steht die Proportion

$$\begin{array}{cccc} \text{St.} & \text{St.} & \text{Kl.} & \text{Kl.} \\ 7 : 4 & = 210 : x & = 120. \end{array}$$

ANMERKUNG.

188. Jede zusammen gesetzte Regel kann auch durch eine einzige goldene Regel aufgelöset werden, wenn man die ersten Verhältnifse oder Bedingungen, (nur müfsen diese vorher gehörig gestellet seyn) mit einander multipliciret, und also daraus ein einziges Verhältnifs machet; nach diesem setzet man das dritte gegebene Glied, welches mit dem zu suchenden einerley Benennung hat, und suchet dann, wie vorher, das vierte. Denn da in die zusammen gesetzte Proportion auch alle die Bedingungen, welche in den ersten zwey oder drey Verhältnifsen enthalten sind, eintreten; so ist es offenbar, dafs zwischen dem dritten gegebenen, und dem vierten gesuchten Gliede der nähmliche Exponent seyn müfse, welcher in den ersten zwey oder drey Verhältnifsen zusammen vorhanden ist. Die vorige Aufgabe würde also nach geschehener Multiplication der ersten Glieder auf folgende Art gesetzet.

$$42 : 60 = 84 : x = 120.$$

Also ist das vierte Glied $x = 120$ Klaftern; die nähmliche Zahl, welche vorher durch eine dreyfache Berechnung gefunden worden ist.

II. ERKLÄRUNG.

189. Die *Gesellschaftsregel* ist die Methode, Gröfsen zu finden, welche solchen einzelnen Personen verhältnifsmäfsig zukommen, die vorher in eine Gesellschaft getreten sind, eine gewifse Summe zusammen getragen, und mit dieser gemeinschaftlich entweder etwas gewonnen, oder verloren haben.

III. AUFGABE.

190. Verhältnifsmäfsige Glieder in der Gesellschaftsregel finden.

AUFLÖSUNG.

I. Die zusammen getragenen einzelnen Summen werden in eine Hauptsumme gesammelt.

II. Dann machet man die Proportion: wie sich die Hauptsumme zur einzelnen Summe des ersten verhält, so verhält sich der gemeinschaftliche Gewinn oder Schaden zu dem einzelnen Gewinn oder Schaden des ersten; und dieses wird so oft wiederhohlet, als theilnehmende Personen sind.

BEWEIS.

Wenn zwischen dem gemeinschaftlichen und einzelnen Schaden oder Nutzen das nähmliche Verhältnifs ist, welches zwischen der zusammen getragenen Hauptsumme, und der einzelnen Summe bestehet, so ist es offenbar, dafs die Theile verhältnifsmäfsig vertheilet sind; nun aber wird, nach der vorhergehenden Methode, das nähmliche Verhältnifs zwischen den vorerwähnten Gliedern gemacht; also sind die Theile verhältnifsmäfsig vertheilet.

I. *Beysp.* Drey Bürger handeln nach Amerika; der erste hat 5000, der zweyte 3000, der dritte 2000 gegeben; der ganze Gewinn beträgt 15000; wie viel mufs jeder davon bekommen?

$10000 : 5000 = 15000 : 7500$ der erste
$10000 : 3000 = 15000 : 4500$ der zweyte
$10000 : 2000 = 15000 : 3000$ der dritte.

II. *Beysp.* Drey Kaufleute machen mit einander Gesellschaft, und kaufen 4000 Fäfser um 500 Dukaten. Der erste will 1300 Fäfser, der zweyte 1460, der dritte 1240; wie viel mufs jeder dafür zahlen?

$$\begin{array}{l} \text{F.} \quad \text{F.} \quad \text{D.} \quad \text{D.} \\ 4000 : 1300 = 500 : 162\tfrac{1}{2} \text{ der erste} \\ \text{F.} \quad \text{F.} \quad \text{D.} \quad \text{D.} \\ 4000 : 1460 = 500 : 182\tfrac{1}{2} \text{ der zweyte} \\ \text{F.} \quad \text{F.} \quad \text{D.} \quad \text{D.} \\ 4000 : 1240 = 500 : 155 \text{ der dritte.} \end{array}$$

I. ANMERKUNG.

191. Sind noch andere Bedingungen angehängt, wie vorher von der zusammen gesetzten Regel gesagt worden ist, z. B. ist nebst der Verschiedenheit der Beyträge auch die Zeit verschieden, für welche jeder beygetragen hat, so mufs man, ehe noch die Proportion gestellet wird, die einzelnen Beyträge mit der ihnen angemefsenen Zeit multipliciren, dann diese neuen Beyträge in eine Summe sammeln und endlich die Proportion mit diesen neuen vermehrten Gliedern aufsetzen.

III. *Beysp.* Der erste Kaufmann hat beygetragen
100 auf 19 Monathe
Der zweyte 130 auf 10 Monathe
Der dritte 300 auf 6 Monathe.
Ihr gemeinschaftlicher Gewinn ist 10000; wie viel bekommt jeder davon?

Beytrag	des ersten ist	1900
	des zweyten	1300
	des dritten	1800
	Summe	5000

$$\begin{array}{l} 5000 : 1900 = 10000 : 3800 \text{ der erste} \\ 5000 : 1300 = 10000 : 2600 \text{ der zweyte} \\ 5000 : 1800 = 10000 : 3600 \text{ der dritte.} \end{array}$$

II. ANMERKUNG.

192. Was hier die Arithmetiker von der Vermischungsregel beyzusetzen pflegen, davon haben wir bereits bey den Gleichungen (§. 160.) gehandelt.

III. ERKLÄRUNG.

193. Die *Regel des falschen Satzes* (Regula falsi) bestehet darin, daſs man statt der unbekannten Glieder einen willkührlichen Werth, der aber doch zu den unbekannten Gröſsen verhältniſsmäſsig werden muſs, annimmt, um mittels der Dreysatzregel den wahren Werth heraus zu bringen.

Beysp. Es sind unter 3 Personen 1300 Gulden zu theilen; die erste soll fünf Mahl mehr, als die zweyte bekommen, die zweyte zwey Mahl mehr als die dritte. Bekommt diese letztere 1, so bekommt die zweyte 2, und die erste 10; diese Summen zusammen machen 13. Nun mache man drey Proportionen: wenn 13 zu vertheilen sind, so bekommt die erste 10; wie viel bekommt sie, wenn 1300 Gulden zu vertheilen sind?

$13 : 10 = 1300 : 1000$	Theil der ersten Person	
$13 : 2 = 1300 : 200$	der zweyten	
$13 : 1 = 1300 : 100$	der dritten.	

ANMERKUNG.

194. Jedermann bemerket, daſs diese und alle dergleichen Aufgaben durch einfache Gleichungen, und durch die daselbst gegebenen Regeln aufgelöset werden können; daher wollen wir von dieser Methode nicht mehreres anführen; denn wer die Anfangsgründe der Algebra wohl inne hat, der hat nicht nöthig, sich des falschen Satzes zu bedienen.

X. HAUPTSTÜCK.

VON DEN REIHEN ODER PROGRESSIONEN.

I. ERKLÄRUNG.

195. Eine *Reihe* oder *Progreſsion* nennet man eine Menge zusammenhängender Gröſsen, die in lauter gleichen Verhältniſsen fortgehen; und zwar eine *arithmetische* Reihe, wenn die Gröſsen in arithmetischen Verhältniſsen fortgehen; daher man sie auch die Reihe gleichunterschiedener Gröſsen nennet; eine *geometrische*, wenn die Gröſsen in geometrischen Verhältniſsen fortgehen; daher heiſst sie auch eine Reihe solcher Gröſsen, welche immer den nähmlichen Quotienten haben. Beyde werden in Zahlen auf folgende Art ausgedrückt.

1	4	7	10	13	16	19	22	u. s. w.
1	2	4	8	16	32	64	128	u. s. w.

II. ERKLÄRUNG.

196. Eine *steigende* Reihe ist diejenige, wenn die nachfolgenden Glieder gröſser sind, als die vorhergehenden; eine *fallende*, wenn sie kleiner sind. Bey einer steigenden Reihe ist das letzte Glied das gröſste, und das erste das kleinste; bey einer fallenden ist das erste Glied das gröſste, und das letzte das kleinste.

FOLGERUNG.

197. Der Ursprung einer Reihe ist demnach eine stätige Proportion, welche nähmlich, wenn sie fortgeführet wird, durch Suchung des folgenden Gliedes nach den bekannten Regeln, in eine Reihe übergehet. Nimmt man z. B. die stätige Proportion $\div$ 1 . 4 . 7, und machet dann 4 zu 7, wie 7 zu 10, so hat man das vierte Glied; und wieder 7 zu 10, wie 10 zu 13, so hat man das fünfte Glied, und so ins Unendliche fort. Eben das geschieht bey einer geometrischen, z. B. 1 : 2 = 2 : 4 und 2 : 4 = 4 : 8 und 4 : 8 = 8 : 16; werden sie nun stätig ausgedrückt, so geben sie folgende Zahlen 1 : 2 : 4 : 8 : 16 u. s. f.

ANMERKUNG.

198. Um Verwirrungen zu vermeiden, werden wir immer von der steigenden Reihe handeln; will man sie in eine fallende verändern, so kann dieses leicht durch Verwechselung der Zeichen, oder durch entgegengesetztes Verfahren, und Verkehrung der Ordnung geschehen, wobey sich alles das anwenden läſst, was von der ersteren gesagt worden ist. Und da die Eigenschaften einer arithmetischen Reihe, und die daraus hergeleiteten Folgerungen von den Eigenschaften einer geometrischen Reihe sehr unterschieden sind, so werden wir anfangs besonders von den ersteren, dann auch von den andern reden.

HAUPTLEHRSATZ.

199. Jede steigende arithmetische Reihe kann zu dieser Formel reduciret werden $\div a \,.\, a+d \,.\, a+2d \,.\, a+3d \,.\, a+4d \,.\, a+5d$ u. s. f. ins Unendliche.

BEWEIS.

Eine arithmetische Reihe ist eine Menge

stätiger Gröſsen, die in gleichen Unterschieden fortgehen; also ist jedes nachfolgende Glied um einen bestimmten und gleichen Unterschied gröſser, als das vorhergehende. Nennet man also das erste Glied a, so ist das zweyte eben daſselbe erste, wozu der Unterschied addiret wird, das ist $a+d$; das dritte ist eben daſselbe vorhergehende, wozu der nähmliche Unterschied addiret wird, das ist $a+d+d$ oder $a+2d$; das vierte ist wieder das vorhergehende dritte, mit dem Unterschiede, das ist $a+2d+d$, oder $a+3d$, und so mit den übrigen. Also wird eine steigende arithmetische Reihe durch die obige Formel richtig ausgedrückt; was zu beweisen war. Bey Zahlen geht das nähmliche vor:

$$2 \,.\, 2+3 \,.\, 2+6 \,.\, 2+9 \,.\, 2+12 \,.\, 2+15 \,.\, 2+18$$
$$2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, 14 \,.\, 17 \,.\, 20 \,.$$

Bey einer fallenden setzet man:

$$a \,.\, a-d \,.\, a-2d \,.\, a-3d \text{ u. s. f.}$$

I. FOLGERUNG.

200. Jedes der nachfolgenden Glieder in dieser Formel, wie man bey dem ersten Anblicke erkennen kann, bestehet aus dem ersten Gliede a, und aus dem Unterschiede, multipliciret mit derjenigen Zahl, welche der Zahl der vorhergehenden Glieder gleich, oder um eine Einheit kleiner ist, als das verlangte Glied. So wird bey dem vierten Gliede die Gröſse d mit 3 multipliciret, oder das vierte Glied ist $a+3d$; das sechste Glied ist $a+5d$; das zwanzigste Glied ist $a+19d$. Ist das erste Glied 2, und der Unterschied 3, so ist das zwanzigste Glied $2+3\times19=2+57=59$. Der Grund davon ist, weil jedes Glied auſser dem ersten den gemeinschaftlichen, zu sich addirten Unterschied hat; also wird der Unterschied so oft genommen, als Glieder auſser einem, oder dem ersten sind.

II. FOLGERUNG.

201. Soll der Unterschied zwischen dem ersten und letzten, oder demjenigen Gliede, bey welchem die Reihe aufhöret, bestimmet werden, so subtrahiret man das erste Glied a von dem letzten, z. B. von dem siebenten $a+6d$; dann ist der Rest (indem $a-a$ sich gegenseitig aufheben) $=6d$, das ist: *der Unterschied zwischen dem ersten und letzten Gliede ist gleich dem gemeinschaftlichen Unterschiede* d; *multipliciret mit der Anzahl der Glieder der Reihe, um eine Einheit weniger.*

III. FOLGERUNG.

202. Nimmt man die Summe von dem ersten und letzten Gliede, so wird diese der Summe von dem zweyten und vorletzten Gliede gleich seyn; und so auch der Summe von dem dritten und vorletzten. Sind z. B. sechs Glieder, so ist die Reihe a . $a+d$. $a+2d$. $a+3d$. $a+4d$. $a+5d$, und die Summe des ersten und letzten oder sechsten ist $2a+5d$; des zweyten und fünften $2a+5d$; des dritten und vierten $2a+5d$. Überhaupt ist bey jeder arithmetischen Reihe die Summe der äußeren Glieder $=$ der Summe derjenigen Glieder, die von den letzten gleichweit abstehen; diese Summe ist wieder der Summe der anderen von den äußeren gleichweit abstehenden Glieder gleich oder, wäre die Anzahl der Glieder ungerade, dem Doppelten des mittleren Gliedes gleich. Der Grund davon ist, weil in jeder Proportion die Summe der äußeren Glieder, der Summe der mittleren, oder in einer stätigen Proportion dem Doppelten des mittleren Gliedes gleich ist; nun aber können bey einer Reihe alle Glieder die äußeren oder mittleren seyn, wenn man indeßen die übrigen wegläßt; also ist die Summe der äußeren Glieder $=$ der Summe der von den äußeren gleichweit abstehenden Glieder, welche man als mittlere betrachten kann. Z. B. in der Reihe 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 ist so wohl die Summe der äußeren, als auch die Summe der gleichweit abstehenden Glieder 25.

Wären sieben Glieder, und unter diesen das letzte 20, so wären die Summen 22, und das mittlere wäre 11, deſsen Doppeltes auch $=22$ ist.

IV. FOLGERUNG.

203. Da alle diese Summen gleich sind, so wird man, wenn sie so oft genommen werden, als sie in der Reihe enthalten sind, die Summe aller Glieder der ganzen Reihe haben; nun aber sind sie so oft enthalten, als die Glieder, zwey Mahl genommen, addiret werden, das ist, so oft, als die Einheit in der halben Zahl der Glieder enthalten ist; also erhält man die Summe der ganzen Reihe, wenn die Summe des ersten und letzten mit der halben Zahl der Glieder multipliciret wird, oder was einerley ist, wenn die Hälfte des ersten und letzten mit der Anzahl der Glieder multipliciret wird, oder auch, wenn die Summe des ersten und letzten mit der Anzahl der Glieder multipliciret, und das Product mit 2 dividiret wird. Sind also z. B. sechs Glieder, so ist die Summe $(2a+5d)\,3=6a+15d$. Ist die Reihe $2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 17 \cdot 20 \cdot 23$, so ist die Summe $(2+23)\,\frac{8}{2}=100$;

V. FOLGERUNG.

204. Hieraus flieſst, daſs man bey jeder Reihe auf fünf verschiedene Gegenstände zu sehen habe, von welchen die Eigenschaften und Kennzeichen einer jeden Reihe abhängen: nähmlich 1.) auf das erste oder kleinste Glied, von welchem die Reihe anfängt; 2.) auf das gröſste oder letzte, mit welchem sie sich endiget; 3.) auf den gemeinschaftlichen Unterschied der Reihe oder der Glieder unter sich; 4.) auf die Anzahl der Glieder; und endlich 5.) auf die Summe aller Glieder. Dieſs alles ist dergestalt mit einander verbunden, daſs, wenn einmahl drey aus diesen Eigenschaften bestimmet sind, die übrigen zwey sich von selbst bestimmen. Ist einmahl das erste und letzte Glied festgesetzt, und der Unterschied bestimmt, so ist keine andere,

als eine schon bestimmte Anzahl der Glieder, und eine bestimmte Summe aller Glieder möglich. Fängt die Reihe von 2 an, und endiget sie sich mit 23, und ist der gemeinschaftliche Unterschied 3, so ist es unmöglich, daſs mehr als 8 Glieder seyn, oder eine andere Summe als 100 sey.

ANMERKUNG.

205. Will man so wohl diese Eigenschaften, als auch dasjenige, was in den vorhergehenden Folgerungen gesagt worden ist, algebraisch ausdrücken, so wird man auf solche Art allgemeine Ausdrücke erhalten, die sich auf jeden besonderen Fall anwenden laſsen, so zwar, daſs, so bald drey aus den fünf vorerwähnten Eigenschaften gegeben sind, die übrigen drey immer sich finden laſsen.

Es sey das erste oder kleinste Glied $= a$
das letzte oder gröſste $= \omega$
der Unterschied der Glieder $= d$
die Anzahl der Glieder $= n$
die Summe der Glieder $= s$

so hat man, vermöge der I. Folgerung, jedes Glied $=$ dem ersten Gliede a, und dem gemeinschaftlichen Unterschiede $d \times$ mit der Anzahl der Glieder, um eines weniger, das ist, mit $n - 1$; also ist jedes Glied $= a + nd - d$.

Vermöge der II. Folgerung ist der Unterschied zwischen dem ersten und letzten Gliede $\omega - a$ gleich dem gemeinschaftlichen Unterschiede d, multipliciret mit der Anzahl der Glieder -1, oder mit $nd - d$; und diese ganze Eigenschaft wird so ausgedrückt $\omega - a = nd - d$.

Da man, vermöge der IV. Folgerung, die Summe der ganzen Reihe s erhält, wenn die Summe des ersten und letzten Gliedes oder $a + \omega$ mit der halben Anzahl der Glieder, oder mit $\frac{1}{2}n$, oder $\frac{n}{2}$ multipliciret, so entstehet von dieser Eigenschaft der algebraische Ausdruck $f = \frac{an + \omega n}{2}$.

Diese Ausdrücke dienen zur Lösung folgender Aufgabe.

I. AUFGABE.

206. Formeln machen, durch welche, wenn drey Eigenschaften einer Reihe gegeben sind, die übrigen zwey sich finden lassen.

Um die Auflösung durch ein Beyspiel zu erleichtern, stellen wir folgende Reihe auf:

1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 . 28 . 31 . 34.

AUFLÖSUNG.

In der vorhergehenden Anmerkung ward aus der II. Folgerung der algebraische Ausdruck $\omega - a = nd - d$ abgeleitet. Wenn nun in dieser Gleichung die zu suchende Grösse auf die eine, und die gegebenen drey Grössen auf die andere Seite, nach den Regeln der Gleichung, übertragen werden, so erhält man vier Formeln: eine für das erste Glied a, die zweyte für das letzte Glied ω, die dritte für den Unterschied d, und die vierte für die Anzahl der Gieder n.

I. $a = \omega - nd + d$ I. Erstes Gl. $= 34 - 36 + 3$, d. i. 1

II. $\omega = nd - d + a$ II. Letztes Gl. $= 36 - 3 + 1$, d. i. 34

III. $d = \frac{\omega - a}{n - 1}$ III. Unterschied $= \frac{34 - 1}{12 - 1} = 3$

IV. $n = \frac{\omega - a + d}{d}$ IV. Anz. der Gl. $= \frac{34 - 1 + 3}{3} = 12$.

Für die dritte Formel wird in der zweyten das Product $nd - d$ in seine Factoren $(n-1) \times d$ aufgelöset;

$\omega = (n-1)d + a$; und $n-1$ wird durch die Division übertragen.

In eben dieser Anmerkung hat man, vermöge der IV. Folgerung, den Ausdruck für die Summe $\int = \frac{an + \omega n}{2}$. Suchet man nun in dieser Gleichung, wie vorher, den Ausdruck $\int$, a, ω, und n, so hat man folgende vier Formeln:

V. $\int = \frac{an + \omega n}{2}$ V. Summe $= \frac{1 \times 12 + 34 \times 12}{2} = 210$

VI. $a = \frac{2\int}{n} - \omega$ VI. Erstes Gl. $= \frac{420}{12} - 34 = 1$

VII. $\omega = \frac{2\int}{n} - a$ VII. Letzt. Gl. $= \frac{420}{12} - 1 = 34$

VIII. $n = \frac{2\int}{a + \omega}$ VIII. Anz. d. Gl. $= \frac{420}{1 + 34} = 12$.

Für die sechste Formel wird die fünfte in diese verändert $2\int = an + \omega n$ oder $an + \omega n = 2\int$; wird ωn übertragen, so ist $an = 2\int - \omega n$, dieses mit n dividiret, wird $a = \frac{2\int}{n} - \frac{\omega n}{n}$ oder $a = \frac{2\int}{n} - \omega$. Eben so verfährt man bey der siebenten Formel.

Für die achte Formel wird die fünfte in die Factoren $2\int = (a + \omega)n$ aufgelöset; $a + \omega$ wird durch die Division übertragen, und so entstehet die achte Formel.

Wenn nun der vorher gefundene zweyfache Werth der Gröſse a mit dem zweyfachen Werthe der Gröſse n verglichen, und für die zu suchenden Glieder Gleichungen gemacht werden, so erhält man zwölf andere Formeln. Durch Verbindung der ersten und sechsten Formel $\omega - nd + d = \frac{2\int}{n} - \omega$ erhält man folgende:

IX. $\omega = \frac{2\int + dn^2 - dn}{2n}$

X. $d = \frac{2\omega n - 2\int}{n^2 - n}$

XI. $s = \frac{2\omega n - dn^2 + dn}{2}$

XII. $n = \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{d^2} + \frac{\omega}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2s}{d}\right)} + \frac{\omega}{d} + \frac{1}{2}$

In Zahlen:

IX. Letzt. Glied $= \frac{420 + 432 - 36}{24} = 34.$

X. Unterschied $= \frac{816 - 420}{144 - 12} = 3$

XI. Summe $= \frac{816 - 432 + 36}{2} = 210$

XII. Anz. der Gl. $= \sqrt{\left(\frac{1156}{9} + \frac{34}{3} + \frac{1}{4} - \frac{420}{3}\right)} + \frac{34}{3} + \frac{1}{2} = 12.$

Die neunte, zehnte und eilfte werden durch die bloſse Übertragung gemacht; die zwölfte wird durch die Übertragung in diese verändert: $n^2 d - 2\omega n - dn = -2s$, oder $n^2 - \left(\frac{2\omega - d}{d}\right) n = -\frac{2s}{d}$; da dieſs ein unvollkommenes Quadrat (§. 106.) und der eine Factor $= n$ ist, so ist der andere Factor $= \frac{2\omega - d}{2d}$ (§. 140.); machet man also daraus ein Quadrat, so hat man $\frac{4\omega^2}{4d^2} + \frac{4\omega d}{4d^2} + \frac{d^2}{4d^2}$; dieses reduciret man (durch Tilgung gleicher Gröſsen in dem Zähler so wohl als in dem Nenner) zu $\frac{\omega^2}{d^2} + \frac{\omega}{d} + \frac{1}{4}$, welche Gröſse zu beyden Gliedern addiret wird; und dann ist die Gleichung $n^2 - \left(\frac{2\omega - d}{d}\right) n + \frac{\omega^2}{d^2} + \frac{\omega}{d} + \frac{1}{4} = \frac{\omega^2}{d^2} + \frac{\omega}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2s}{d}$. Wird nun die Wurzel ausgezogen, so bleibet von dem ersten Theile $n - \frac{2\omega - d}{2d}$ oder $n - \frac{\omega}{d} - \frac{1}{2}$, welche zwey verneinende Grösen mit dem entgegen gesetzten Zeichen $+$ auf die andere Seite übertragen werden, wo die vorige Grösse hinter dem Wurzelzeichen stehet; und so hat man die einzige Grösse n. In Zahlen geschieht die Auflösung auf diese Art $\sqrt{\left(\frac{1156}{9}+\frac{34}{3}+\frac{1}{4}-140\right)}\,\frac{71}{6}$; durch die Reduction der ersteren Brüche zu einem gemeinschaftlichen Nenner, wird $\sqrt{\left(\frac{15134}{108}-\frac{15120}{108}\right)}+\frac{71}{6}$, das ist, $\frac{3}{108}$ oder $\frac{1}{36}$; durch Ausziehung der Wurzel wird $\frac{1}{6}$; dieses zu $\frac{71}{6}$ addiret, gibt $\frac{72}{6}$, oder 12. Durch Verbindung der zweyten und siebenten Formel, und durch Wegschaffung des ω, erhält man $nd-d+a=\frac{2s}{n}-a$; daraus entstehet

$$\text{XIII.}\quad n=\sqrt{\left(\frac{2s}{d}+\frac{a^2}{d^2}-\frac{a}{d}+\frac{1}{4}\right)}-\frac{a}{d}+\frac{1}{2}.$$

$$\text{Anzahl}=\sqrt{\left(\frac{420}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}-\frac{1}{3}+\frac{1}{1}=12.$$

$$\text{XIV.}\quad a=\frac{2s}{2n}-\frac{nd}{2}+\frac{d}{2},\qquad \text{Erstes Glied}=\frac{420}{24}-\frac{36}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

$$\text{XV.}\quad d=\frac{2s-2an}{n^2-n}.\qquad \text{Unterschied}=\frac{420-24}{144-12}=3.$$

$$\text{XVI.}\quad s=\frac{n^2d-nd+2na}{2}.\qquad \text{Summe}=\frac{432-36+24}{2}=210.$$

Die dreyzehnte Formel wird auf eben die Art, wie vorher die zwölfte, aufgelöset; nähmlich durch Ergänzung des Quadrates, und durch Ausziehung der Wurzel. In Zahlen geschieht die Auflösung, wenn man die Brüche $120+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ zu dem gemeinschaftlichen Nenner $\frac{15123}{108}$ und zu den kleinsten Ausdrücken $\frac{5041}{36}$ reduciret; wird dann aus dieser Grösse die Wurzel ausgezogen, so hat man $\frac{71}{6}$, dazu addiret man die zwey letzten Brüche $-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ oder $-\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{1}{6}=\frac{72}{6}=12$. Die vierzehnte, fünfzehnte, und sechszehnte erhält man durch die Übertragung.

Durch Verbindung der vierten und achten Formel, und durch Wegschaffung des n, erhält man $\frac{\omega-a+d}{d}=\frac{2s}{a+\omega}$; daraus wird

XVII. $s=\frac{\omega^2-a^2+ad+\omega d}{2d}$; Summe $=\frac{1156-1+3+102}{6}$ $=210$.

XVIII. $d=\frac{\omega^2-a^2}{2s-a-\omega}$ Unterschied $=\frac{1156-1}{420-1-34}=3$.

XIX. $a=\sqrt{(\omega^2+\omega d-2sd+\frac{1}{4}d^2)}+\frac{1}{2}d$

Erstes Gl. $=\sqrt{(1156+102-1260+\frac{9}{4})}+\frac{3}{2}=1$.

XX. $\omega=\sqrt{(a^2-ad+\frac{1}{4}d^2+2sd)}-\frac{1}{2}d$

Letzt. Gl. $=\sqrt{(1260+1-3+\frac{9}{4})}-\frac{3}{2}=34$.

Die siebenzehnte und achtzehnte erhält man durch die Übertragung; die neunzehnte anfangs auch durch die Übertragung $\omega^2+\omega d-2sd=a^2-ad$; da dieses zweyte Glied ein unvollständiges Quadrat, und $-ad$ das doppelte Product der Wurzeln ist, so ist $\frac{1}{2}d$ der andere Factor; wenn man nun die Glieder verwechselt und auf beyden Seiten das Quadrat $\frac{1}{4}d^2$ addiret, so hat man $a^2-ad+\frac{1}{4}d^2=\omega^2+\omega d-2sd+\frac{1}{4}d^2$. Wird nun die Wurzel $a-\frac{1}{2}d$ ausgezogen, und $\frac{1}{2}d$ übertragen, so hat man den Werth der Größe a. Die Auflösung in Zahlen gibt $\sqrt{(-2+\frac{9}{4})}+\frac{3}{2}$, oder $\sqrt{(-\frac{8}{4}+\frac{9}{4})}+\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{2}{2}=1$.

Die zwanzigste Formel wird in der nähmlichen Ordnung, wie die vorhergehende, gebildet. Die Auflösung in Zahlen gibt $\sqrt{(1258+\frac{9}{4})}-\frac{3}{4}=\sqrt{\frac{5041}{4}}-\frac{3}{2}=\frac{71}{2}-\frac{3}{2}=\frac{68}{2}=34$.

FOLGERUNG.

207. Wenn also von diesen fünf Eigenschaften, nähmlich, dem kleinsten Gliede, dem größten Gliede, dem Unterschiede, der Anzahl der Glieder, und der Summe der Glieder, das ist, wenn von a, ω, d, n und s drey gegeben werden, so kann man die zwey übrigen durch folgende Formeln finden:

Für das erste Glied.

I. $a = \omega - nd + d$

VI. $a = \frac{2\int}{n} - \omega$

XIV. $a = \frac{2\int - dn^2 + dn}{2n}$

XIX. $a = \sqrt{(\omega^2 + \omega d - 2\int d + \frac{1}{4}d^2)} + \frac{1}{2}d.$

Für das letzte Glied.

II. $\omega = a + dn - d$

VII. $\omega = \frac{2\int}{n} - a$

IX. $\omega = \frac{2\int + dn^2 - dn}{2n}$

XX. $\omega = \sqrt{(a^2 - ad + 2d\int + \frac{1}{4}d^2)} - \frac{1}{2}d.$

Für den Unterschied.

III. $d = \frac{\omega - a}{n - 1}$

X. $d = \frac{2\omega n - 2\int}{n^2 - n}$

XV. $d = \frac{2\int - 2an}{n^2 - n}$

XVIII. $d = \frac{\omega^2 - a^2}{2\int - a - \omega}$

Für die Summe.

V. $\int = \frac{an + \omega n}{2}$

VI. $\int = \frac{2\omega n - dn^2 + dn}{2}$

XVI. $\int = \frac{n^2 d - dn + 2na}{2}$

XVII. $f=\frac{\omega^2-a^2+ad+\omega d}{2d}$

Für die Anzahl der Glieder.

IV. $n=\frac{\omega-a+d}{d}$

VIII. $n=\frac{2f}{a+\omega}$

XIII. $n=\sqrt{\left(\frac{2f}{d}+\frac{a^2}{d^2}-\frac{a}{d}+\frac{1}{4}\right)}-\frac{a}{d}+\frac{1}{2}$

XII. $n=\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{d^2}+\frac{\omega}{d}-\frac{2f}{d}+\frac{1}{4}\right)}+\frac{\omega}{d}+\frac{1}{2}$.

ANMERKUNG.

208. Was für einen Gebrauch diese Formeln in der Anwendung haben, dieſs soll durch folgende Beyspiele erkläret werden.

I. AUFGABE.

209. Peter will seine Bibliothek von 1400 Büchern verkaufen, und verlangt für das erste Buch 2 Kreuzer, für das zweyte um drey Kreuzer mehr, für das dritte wieder um 3 Kreuzer mehr, u. s. f. Es fragt sich also, wie viel er für das letzte Buch, und für alle Bücher zusammen bekomme?

AUFLÖSUNG.

$n = 1400$
$d = 3$
$a = 2$
ω wird gesucht.
f wird gesucht.

Nach der zweyten Formel $\omega = a + dn - d$
$\omega = 2 + 1400 \times 3 - 3$ das ist $2 + 4200 - 3 = 4199$ Krn., der Preis des letzten Buches.
Nach der fünften Formel:

$$f = \frac{an + \omega n}{2}$$

$$= \frac{2 \times 1400 + 4199 \times 1400}{2} \text{ das ist } \frac{2800 + 5878600}{2}$$

$$= \frac{5881400}{2} = 2940700 \text{ Krn. oder } 49011 \text{ Gl. } 40 \text{ Krn.}$$

II. AUFGABE.

210. Ein Feldherr verspricht 12 Soldaten, welche zuerst den Wall übersteigen werden, eine Belohnung, doch so, daſs der erste 49 Ducaten, die übrigen aber immer um 4 Ducaten weniger bekommen sollen. Es fragt sich, wie viel Ducaten der letzte, auf den der kleinste Preis fällt, und wie viel alle zusammen bekommen?

AUFLÖSUNG.

$n = 12$
$\omega = 49$
$d = 4$
a und f wird gesucht.

Nach der ersten Formel: $a = \omega - dn + d$
$a = 49 - 48 + 4 = 5$

Nach der eilften Formel: $f = \frac{2\omega n - dn^2 + dn}{2}$

$$f = \frac{1176 - 576 + 48}{2} = \frac{648}{2} = 324.$$

III. AUFGABE.

211. Peter will 222 Groschen unter 12 Arme in steigender Reihe vertheilen, und macht den Anfang mit 2 Groschen, die er dem ersten gibt. Wie viel bekommt der letzte? und was für einen Unterschied hat jeder Arme von dem andern?

$\int = 222$; $n = 12$, $a = 2$,
ω und d wird gesucht.

Nach der VII. Formel: $\omega = \frac{2\int}{n} - a$

$$\omega = \frac{444}{12} - 2 = 37 - 2 = 35.$$

Nach der XV. Formel: $d = \frac{2\int - 2an}{n^2 - n}$

$$d = \frac{444 - 48}{144 - 12} = \frac{396}{132} = 3.$$

VI. AUFGABE.

212. Ein Arbeiter erhält am ersten Tage für seine Arbeit 3 Groschen, am zweyten um fünf Groschen mehr, u. s. f. Heute bekommt er 38 Groschen. Es fragt sich, der wievielte Arbeitstag heute sey? und wie viel Groschen er schon bekommen habe?

$a = 3$
$d = 5$
$\omega = 38$
n und $\int$ wird gesucht.

Nach der vierten Formel $n = \frac{\omega - a + d}{d}$

$$n = \frac{38 - 3 + 5}{5} = 8$$

Nach der siebenzehnten $f = \frac{\omega^2 - a^2 + ad + \omega d}{2d}$

$$\text{Summe} = \frac{1444 - 9 + 15 + 190}{10} = 164$$

ANMERKUNG.

213. Auf diese Art können unzählige dergleichen Aufgaben, die zu diesen Reihen gehören, gelöset werden, z. B. folgende:

V. AUFGABE.

214. Zu dem gegebenen ersten und letzten Gliede, die mittleren verhältnifsmäfsigen Glieder, so viel deren auch immer seyn mögen, herstellen.

AUFLÖSUNG.

Der Unterschied des ersten und letzten Gliedes wird mit der Anzahl aller Glieder —1 dividiret, und der Quotient ist der gemeinschaftliche Unterschied, welcher, zum vorhergehenden Gliede addiret, das nachfolgende gibt.

Beysp. Zwischen 7 und 13 sollen 4 Glieder gefunden werden; also sind die Glieder der Reihe $= 6$; nach der III. Formel hat man $d = \frac{\omega - a}{n - 1} = \frac{13 - 7}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$; also ist die Reihe:

$$7 : 8\tfrac{1}{5} : 9\tfrac{2}{5} : 10\tfrac{3}{5} : 11\tfrac{4}{5} : 13.$$

BEWEIS.

Hat man einmahl den Unterschied der Reihe gefunden, so ist die Reihe, wozu das erste und letzte Glied gegeben worden ist, schon bestimmt; nun aber erhält man den Unterschied nach der Formel $d = \frac{\omega - a}{n - 1}$, das ist, der Unterschied des ersten und letzten Gliedes, mit der Anzahl der Glieder -1 dividiret, gibt den gemeinschaftlichen Unterschied; also werden durch die vorerwähnte Auflösung die verlangten Glieder bestimmet.

HAUPTLEHRSATZ.

215. Jede steigende geometrische Reihe läſst sich zu dieser Formel reduciren: $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 : aq^7 :$ u. s. f. ins Unendliche.

BEWEIS.

Eine geometrische Reihe ist eine Menge zusammenhängender Gröſsen, die in gleichen geometrischen Verhältniſsen fortgehen, oder derer eine von der andern immer um den nähmlichen Quotienten unterschieden ist; also muſs jedes nachfolgende Glied dem vorhergehenden Gliede gleich seyn, wenn dieses, durch die Multiplication mit dem Quotienten, vermehret ist; und da jedes Glied, in Rücksicht auf sein nachfolgendes, ein vorhergehendes ist, so erhält man immer das nachfolgende, so lange man das vorhergehende mit dem nähmlichen Quotienten multipliciret. Ist also das erste vorhergehende a und der Quotient q, so ist das nachfolgende $a \times q$ oder aq; deſsen nachfolgendes ist wieder $aq \times q$

oder aq^2, und deſsen nachfolgendes wieder $aq^2 \times q$ oder aq^3, und so mit den übrigen ins Unendliche fort; also wird jede geometrische Reihe durch die vorhergehende Formel richtig ausgedrückt.

I. FOLGERUNG.

216. Jedes der nachfolgenden Glieder in dieser Formel, wenn man sie abermahl genau betrachtet, bestehet aus dem ersten Gliede a, multipliciret mit dem Quotienten q, erhoben zu derjenigen Würde, welche durch die vorhergehende Anzahl der Glieder, oder durch die ganze Anzahl der Glieder -1 angezeiget wird. Der Grund liegt darin, weil alle nachfolgenden Glieder mit dem Quotienten multipliciret sind; das erste aber ist weder ein nachfolgendes, noch mit dem Quotienten multipliciret; also geschieht die Multiplication mit dem Quotienten so oft, als Glieder, auſser einem oder dem ersten, vorhanden sind. So ist das sechste Glied aq^5, das zwölfte Glied aq^{11} u. s. f.

ANMERKUNG.

217. Wenn man das, was bisher gesagt worden ist, im allgemeinen ausdrücket, und eine unbestimmte Anzahl der Glieder oder $= n$ annimmt, so ist das letzte Glied, womit die Reihe sich endiget, $= aq^{n-1}$, oder $a \times q$, erhöhet zu derjenigen Würde, welche durch die Anzahl der Glieder -1, oder durch die Anzahl der vorhergehenden Glieder angezeiget wird. So ist das zwölfte Glied $= aq^{11}$.

II. FOLGERUNG.

218. Nimmt man das Product des ersten und letzten Gliedes zusammen, so wird man finden, daſs es dem Producte des zweyten und vorletzten Gliedes, und dieses wieder dem Producte des dritten und vorvorletzten gleich ist; und überhaupt, daſs immer das Product der äuſseren dem Producte der von den äuſseren gleichweit abstehenden Glieder gleich ist. Dieſs zeiget sich in der obigen Formel; denn in dieser ist das Product des ersten und achten Gliedes

a^2q^7, des zweyten und siebenten a^2q^7, des dritten und sechsten a^2q^7, des vierten und fünften a^2q^7. Der Grund ist, weil jede Reihe eine Menge verhältnifsmäfsiger Glieder, und in jeder Proportion das Product der äufseren Glieder dem Producte der mittleren Glieder gleich ist; nun aber können in einer Reihe alle gleichweit abstehenden Glieder entweder die äufseren oder die mittleren seyn, wenn man die übrigen wegnimmt; und wenn man jene wieder wegnimmt, so können abermahl zwey andere von einander gleichweit abstehende Glieder die äufseren oder mittleren seyn; folglich mufs das Product aller von einander gleichweit abstehenden Glieder immer gleich seyn. Z. B. in der Reihe $\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$ sind die Producte der gleichweit abstehenden Glieder $64 \times 2 = 128$; $32 \times 4 = 128$; und $8 \times 16 = 128$. Ist die Anzahl der Glieder ungerade, so wird das mittlere Glied mit sich selbst multipliciret, und folglich ist das Quadrat defselben dem Producte der gleichweit abstehenden Glieder gleich.

III. FOLGERUNG.

219. Aus eben diesem allgemeinen Ausdrucke läfst sich folgern, dafs sich das erste Glied zum dritten, wie das Quadrat des ersten zum Quadrate des zweyten verhalte; das ist, das erste Glied a zu dem dritten aq^2, wie das Quadrat des ersten a^2, zu dem Quadrate des zweyten a^2q^2. Denn in beyden Verhältnifsen ist der Quotient q^2; also ist es eine wahre Proportion. Ferner: das erste verhält sich zu dem vierten Gliede, wie der Kubus des ersten Gliedes, zum Kubus des zweyten; denn $a : aq^3 = a^3 : a^3q^3$; der Quotient ist abermahl q^3 u. s. f.

IV. FOLGERUNG.

220. Ist in eben diesem allgemeinen Ausdrucke a, oder das erste Glied $= 1$, so gehet die Reihe $a : aq^1 : aq^2 : aq^3$ u. s. f. in die folgende über $1 : 1q^1 : 1q^2 : 1q^3$; das ist, $1 : q^1 : q^2 : q^3$ u. s. f. Und da jedes Glied, defsen Exponent $= 0$ ist, in sich selbst $= 1$ ist (§. 48.), so kann man,

an die Stelle der Einheit, q^0 setzen, und daher die ganze Reihe so ausdrücken $q^0 : q^1 : q^2 : q^3$ u. s. f. Hieraus erhellet, daſs die Würden der Gröſsen in geometrischer, die Exponenten aber in arithmetischer Reihe stehen.

I. ANMERKUNG.

221. Was nun hier von den Reihen, und oben von den geometrischen Proportionen gesagt worden ist, aus diesem laſsen sich wieder Formeln herleiten, welche zur Auflösung geometrischer Aufgaben, die eine Beziehung auf die Reihen haben, dienlich sind. Denn da jede Reihe eine Menge gleich fortlaufender Verhältniſse ist, so verhält sich auch in einer solchen Reihe die Summe der vorhergehenden Glieder zur Summe der nachfolgenden, wie jedes vorhergehende, oder erste Glied zu seinem nachfolgenden oder zweyten Gliede (§. 172). Nun aber ist in einer Reihe jedes Glied, auſser dem letzten, dem kein anderes folget, ein vorhergehendes; und jedes ist, auſser dem ersten, das kein anderes vor sich hat, ein vorhergehendes. Ist also die Summe der Glieder $= s$, so ist die Summe der vorhergehenden die Summe aller Glieder auſser dem letzten $= s - \omega$ und die Summe der nachfolgenden ist die Summe aller Glieder auſser dem ersten $= s - a$; also wird die vorige Proportion auf folgende Art ausgedrückt $s - \omega : s - a = a : aq$; macht man nun aus dieser Proportion, durch die Multiplication der mittleren und äuſseren Glieder, eine Gleichung, so hat man $saq - \omega aq = sa - aa$; dieſs alles mit a dividiret, gibt $sq - \omega q = s - a$. Aus dieser Gleichung kann man nach den Gleichungsregeln so wohl a, als ω, und q, und s finden. Um dieses zugleich durch ein Beyspiel zu erklären, sey die Reihe

$$3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187$$

I. $a = \omega q - sq + s$. Erstes Gl. $= 6561 - 9837 + 3279 = 3$

II. $\omega = \dfrac{sq - s + a}{q}$. Letzt. Gl. $= \dfrac{9837 - 3279 + 3}{3} = 2187$

III. $q = \dfrac{s - a}{s - \omega}$. Quotient $= \dfrac{3279 - 3}{3279 - 2187} = 3$

IV. $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$. Summe $= \frac{6561 - 3}{2} = 3279$.

Die erste und zweyte Formel wird durch die Übertragung gefunden; für die dritte und vierte Formel wird $sq - \omega q$ in die Factoren $(s - \omega)q$, und $sq - s$ in die Factoren $(q - 1)s$ aufgelöset.

II. ANMERKUNG.

222. In der Anmerkung (§. 216.) hat man den Ausdruck für das letzte Glied aq^{n-1}, das ist, $\omega = aq^{n-1}$; also kann man in der vierten Formel aq^{n-1} statt ω setzen; nun aber ist ω mit q multipliciret, also muſs auch aq^{n-1} mit q multipliciret werden; bey der Multiplication der Gröſsen werden die Exponenten addiret, also ist $aq^{n-1} \times q = aq^{n-1+1} = aq^n$, und aus der vierten Formel wird folgende: $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$; daraus erhält man durch die Übertragung diese zwey Formeln:

V. $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$. Summe $= \frac{6561 - 3}{q - 1} = 3279$.

VI. $a = \frac{sq - s}{q^n - 1}$. Erstes Gl. $= \frac{9837 - 3279}{2187 - 1} = 3$

und von dem Ausdrucke $\omega = aq^{n-1}$ erhält man durch die Übertragung und durch die Ausziehung der Wurzel:

VII. $\omega = aq^{n-1}$. Letzt. Gl. $= 3 \times 729 = 2187$.

VIII. $q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$. Quotient $= \sqrt[6]{\frac{2187}{3}} = 3$.

Und da $q^{n-1} = \frac{q^n}{q}$ ist (§. 198.), so wird durch die Übertragung $\frac{\omega q}{a} = q^n$, und die Formel ist:

IX. $q^n = \frac{\omega q}{a}$. Die Zahl der Glieder ist $=$ der Zahl des zu Würden erhobenen Quotienten, von der ersten Würde anzufangen, bis irgend eine derselben der Gröſse $\frac{\omega q}{a}$ gleich ist.

In unserem Falle ist $\frac{\omega q}{a}=2187$, und der Quotient 3, zu den auf einander folgenden Würden 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 erhoben, gibt die siebente Würde; also ist die Anzahl der Glieder sieben.

VI. AUFGABE.

223. Peter setzet in die Lotterie das erste Mahl einen Gulden, das zweyte Mahl zwey, das dritte Mahl vier, und so fort. Es fragt sich, wie viel Gulden er das zwölfte Mahl, und wie viel er überhaupt gesetzet habe?

Die drey bekannten Glieder sind: $a=1$, $q=2$, $n=12$; ω und $\int$ wird gesucht; vermöge der siebenten Formel ist $\omega=aq^{n-1}$; das letzte Glied $=1\times2^{11}=2048$; vermöge der vierten Formel $\int=\frac{\omega q-a}{q-1}$; die Summe $=\frac{4096-1}{1}=4095$ u. s. f.

XI. HAUPTSTÜCK.

VON DEN VERBINDUNGEN ODER COMBINATIONEN.

ERKLÄRUNG.

224. Die *Combination* ist die Methode, alle nur immer mögliche, und zugleich verschiedene Verbindungen mehrerer Dinge zu finden, derer

zwey und zwey, drey und drey, vier und vier u. s. f. zugleich genommen werden, ohne oder mit Rücksicht auf die Verschiedenheit auch des Ortes, welchen die verbundenen Dinge einnehmen können; welches letztere jedes Mahl von der gegebenen Aufgabe abhängt.

ANMERKUNG.

225. Um diefs zu erlangen, ist es nothwendig, dafs man die Berechnung gleich anfangs mit einer kleinen Anzahl von Gröfsen vornehme, damit man das Gesetz entdecke, dem die Verbindungen in den nach der gegebenen Anzahl verbundenen Gröfsen folgen; hat man einmahl dieses Gesetz gefunden, so ist bey Lösung der Aufgaben alle Schwierigkeit gehoben.

I. AUFGABE.

226 Die Zahl der Verbindungen finden, welche mit den 24 Buchstaben des Alphabethes möglich sind, wenn man 2 und 2, 3 und 3, — — — 24 und 24 zugleich nimmt.

AUFLÖSUNG UND BEWEIS.

A, mit sich selbst verbunden, gibt *aa*; *a*, mit *b* verbunden, gibt *ab*; *a*, mit *c*, gibt *ac*, u. s. f. Also gibt es 24 Verbindungen des Buchstaben *a*. Eben so *b*, mit *b* verbunden, gibt *bb*; *b*, mit *a* verbunden, gibt *ba*, u. s. f. folglich sind hier wieder 24 Verbindungen des Buchstaben *b*. Verfährt man nun auf eben diese Art mit *c*, mit *d*, und den übrigen Buchstaben, so sieht man, dafs jeder auf den ersten Platz gestellte Buchstab, 24 verschiedene Mahle mit den übrigen verbunden werden kann; also geben alle 24

Buchstaben zusammen, wenn deren zwey und zwey genommen werden, so viel verschiedene Verbindungen, als 24×24 oder 576.

Werden nun Verbindungen zu drey und drey genommen, das ist, setzet man zu jeder der vorhergehenden den Buchstaben a, so ist die erste Verbindung aaa, die zweyte aab, die dritte aac u. s. f. also gibt a allein 576 neue Verbindungen von drey Buchstaben; was von a bewiesen wird, das muſs auch von allen 24 Buchstaben b, c, d und so fort gelten, derer jeder 576 neue Verbindungen von drey Buchstaben gibt. Hieraus folget also von selbst, daſs alle Verbindungen oder Wörter von drey Buchstaben 576×24, das ist, 13824 sind.

Werden vier Buchstaben verbunden, so verfährt man, wie vorher; a, den vorigen Verbindungen vorgesetzet, gibt 13824 neue Verbindungen von vier Buchstaben. Eben dieses geschieht bey allen 24 Buchstaben; also sind alle Verbindungen von vier Buchstaben 13824×24.

Nachdem nun dieses vorausgesetzt ist, so wird man einsehen, daſs die Verbindungen immer gröſser werden können, wenn man die Summe der vorhergehenden Verbindungen mit 24 multipliciret. Die Verbindungen machen also eine geometrische Reihe, in welcher das erste Glied 576 die Verbindung von zwey, das zweyte von drey, das dritte von vier, und endlich das letzte von drey und zwanzig Buchstaben ist. Der Quotient aber ist 24, und die Zahl der Glieder muſs um eine Einheit kleiner seyn, als die Zahl der Buchstaben, das ist $n = 23$. Aus den vorhergehenden Formeln (§. 183.) wird es nun leicht seyn, das letzte Glied, und die Summe aller Glieder zu finden. Nähmlich das letzte Glied ist $= aq^{n-1} = aq^{23}$.

und die Summe$=\frac{\omega q-a}{q-1}$; setzet man statt ω dessen Werth aq^{n-1}, so ist $ſ=\frac{aq^n-a}{q-1}$ (§. 198) oder $ſ=\frac{576\times24^{23}-576}{23}$.

I. FOLGERUNG.

227. Wenn man auch einzelne Buchstaben ohne andere, oder a, b, c und so fort, für sich allein nimmt, so ist das erste Glied $a=24$, das zweyte aq oder 24×24, und die ganze Summe $=\frac{24\times24^{24}-24}{23}=$ allen möglichen Wörtern von 24 Buchstaben.

II. FOLGERUNG.

228. Wollte man eine Anzahl von wenigeren Verbindungen haben, so schliefset man die Reihe bey demjenigen Gliede, welches jene Verbindungen anzeiget. Z. B. bey der Anzahl der Verbindungen 2 und 2, 3 und 3 — — bis auf 6 und 6 zusammen genommen, da die letzte Verbindung das fünfte Glied ist, so wird dieses aq^4 seyn.

II. AUFGABE.

229. Die Zahl der Verbindungen finden, wenn nur eine gewifse Zahl von Grössen genommen, und jede derselben so oft auf den ersten Platz gestellet wird, als Einheiten genommen werden.

AUFLÖSUNG UND BEWEIS.

Verbindet man a und b zu zwey und zwey, so erhält man aa, bb, ab, ba, 4 Verbindungen, oder die zweyte Würde von der Zahl der zu verbindenden Gröſsen. *A*, *b*, *c* zu zwey und zwey genommen, geben 9 Verbindungen, *aa*, *bb*, *cc*, *ab*, *ba*, *ca*, *ac*, *bc*, *cb*, abermahl die zweyte Würde von der Zahl der zu verbindenden Gröſsen. *A*, *b*, *c*, *d* geben 16 Verbindungen u. s. f. Die verlangte Verbindung zeiget also diejenige Würde an, zu welcher die Zahl der zu verbindenden Gröſsen erhoben wird.

A, *b*, *c* zu drey verbunden, geben 27 Verbindungen, das ist, die dritte Würde von der Zahl der zu verbindenden Gröſsen. *A*, *b*, *c*, *d* zu drey verbunden, geben die dritte Würde von der Zahl 4 u. s. f. Ist also die Zahl der Gröſsen $=m$, die verlangte Verbindung $=n$, so wird m^n die gesuchte Zahl der Verbindungen seyn. Will man 6 Gröſsen zu vier und vier annehmen, so sind diese $=6^4=1296$; will man 9 Gröſsen zu vier und vier annehmen, so sind sie $=9^4=6561$. 100 Gröſsen zu drey und drey verbunden, geben die Zahl der Verbindungen $100^3=1000000$.

ANMERKUNG.

230. Wenn man in der Logik einen allgemeinen bejahenden Satz (zu welchem auch die besonderen gehören) *a*, und einen solchen verneinenden *e*, einen besondern bejahenden *i*, und einen solchen verneinenden *o* nennet, so wird man, da in einem Vernunftschluſse immer drey Sätze verbunden werden, aus jenen 4 Sätzen, zu drey und drey genommen, 64 Verbindungen erhalten, welche die syllogistischen Figuren heiſsen. Doch erkennen die Logiker aus allen denselben nur 10 als regelmäſsige und wahre Figuren. So wird z. B. *eea* verworfen, weil aus zwey allgemeinen verneinenden Sätzen kein allgemeiner bejahender Schluſssatz folgen kann.

III. AUFGABE.

231. Die Zahl der Ortsveränderungen von bestimmten Gröſsen finden.

AUFLÖSUNG UND BEWEIS.

A und *b* läſst zwey solche Veränderungen zu, *ab*, *ba*. *A*, *b*, *c* läſst sechs zu, *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*, das ist, die vorigen 2 Veränderungen werden mit der neuen Zahl der Gröſsen, nähmlich mit 3 multipliciret. *A*, *b*, *c*, *d* läſst 24 Veränderungen zu, das ist, die vorigen 6, mit den 4 neuen multipliciret. *A*, *b*, *c*, *d*, *e* gibt 120 Veränderungen, das ist, die vorigen 24 mit den 5 neuen multipliciret. Hieraus folget nun, daſs man, um die nachfolgenden Veränderungen zu erhalten, immer die vorhergehenden mit der nachfolgenden Zahl multipliciren müſse. Um also überhaupt die Zahl derjenigen Veränderungen zu erhalten, welche jede gegebene Zahl haben kann, schreibe man eine arithmetische Reihe, und unter derselben die Producte, nach der oben angeführten Methode, z. B.

÷1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1.	2.	6.	24.	120.	720.	5040.	40320.	362880.	3628800.

Ein Beyspiel soll dieſs noch mehr erläutern. Es fragt sich, wie oft 6 Personen, die an einem Tische sitzen, verändert werden können? Man nimmt also das unter 6 stehende Product, und so hat man 720 Veränderungen. Sind 10 Personen, so können 3628800 Veränderungen gemacht werden u. s. f.

IV. AUFGABE.

232. Die Zahl der Verbindungen finden,

die an sich selbst verschieden sind, und derer keine mit sich selbst verglichen wird; z. B. von 6 Zahlen 1. 2. 3. 4. 5. 6.

AUFLÖSUNG UND BEWEIS.

1, mit den übrigen verglichen, gibt 5 Verbindungen von zwey Ziffern, nähmlich 1:2, 1:3, 1:4, 1:5, 1:6. 2, mit den übrigen verglichen, gibt 5, weil 1 schon verglichen ist; diese sind 2:3, 2:4, 2:5, 2:6. 3 mit den übrigen verglichen gibt 3, weil 1 und 2 schon verglichen sind, nähmlich 3:4, 3:5, 3:6. 4 gibt 2 Verbindungen, nähmlich 4:5, 4:6. 5 gibt eine 5:6. Also machen die Verbindungen von zwey Ziffern eine arithmetische Reihe 5.4.3.2.1, in welcher das gröſste Glied 5, das kleinste 1, und die Zahl der Glieder 5 ist. Die Summe davon erhält man aus der Formel (§. 173.) $\frac{an+\omega n}{2}$ das ist, $\frac{1\times5+5\times5}{2}$ oder $\frac{5+5\times5}{2}$; nun aber ist $\frac{5\times5+5}{2}$ gleich $\frac{5\times6}{2}$ das ist, die zwey letzten gegebenen Glieder sind mit einander multipliciret, und mit den zwey ersten multiplicirten dividiret; also erhält man die Summe der Glieder von zwey Ziffern, wenn man von was immer für gegebenen Zahlen die letzten zwey multipliciret, und mit dem Producte der ersten zwey dividiret. So erhält man auch eine Verbindung von drey Ziffern, wenn die drey letzten mit einander multipliciret, und mit dem Producte der ersten drey Glieder dividiret werden. Eine Verbindung von vier Ziffern erhält man, wenn die vier letzten Glieder mit einander multipliciret, und mit dem Producte der vier ersten dividiret werden u. s. f.

I. FOLGERUNG.

233. Bey 90 Ziffern also, wenn man zwey und zwey zusammen setztet, sind $\frac{90\times 89}{1\times 2} = 4005$ Verbindungen, die insgemein *Ambi* heifsen; setzet man von 90 Ziffern drey und drey zusammen, so sind $\frac{90\times 89\times 88}{1\times 2\times 3} = 117480$ Verbindungen, oder *Terni*. Setzet man 4 und 4 zusammen, so sind $\frac{90\times 89\times 88\times 87}{1\times 2\times 3\times 4} = 2555190$ Verbindungen oder *Quaterni*. Setzet man 5 und 5 zusammen, so sind $\frac{90\times 89\times 88\times 87\times 86}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} = 43949268$ Verbindungen oder *Quinterni*.

II. FOLGERUNG.

234. Wenn man die Zahl der zu verbindenden Grössen im allgemeinen nimmt, und sie m nennet, so sind, nach der vorhergehenden Folgerung, die Verbindungen von zweyen $\frac{m\times m-1}{1\times 2}$; von dreyen $\frac{m\times m-1\times m-2}{1\times 2\times 3}$; von vieren $\frac{m\times m-1\times m-2\times m-3}{1\times 2\times 3\times 4}$ u. s. f. Vergleicht man dieses mit dem, was von der Erhöhung zu Würden gesagt worden ist (§. 33.), so wird man bemerken, dafs diese Producte mit den Coefficienten der Würden, von dem dritten Gliede anzufangen, ganz die nähmlichen sind. Also werden die Verbindungen der Zahlen m den Coefficienten der Würde $\overline{a+b}^{m}$, von dem dritten Gliede anzufangen, gleich gehalten.

ANMERKUNG.

235. Es sey z. B. die Frage, wie oft 7 Planeten verbunden werden können? Es ist demnach $m=7$, also zwey

und zwey genommen $\frac{7 \times 6}{1 \times 2} = 21$; drey und drey $\frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$; vier zusammen $= 35$; fünf $= 21$; sechs $= 7$; und endlich sieben $= 1$; folglich sind alle Verbindungen $= 120$; und eben diese sind die Coefficienten der zweygliederigen Gröſse $\overline{a+b}^7$.

XII. HAUPTSTÜCK.

VON DEN LOGARITHMEN.

I. ERKLÄRUNG.

236. Wenn unter eine arithmetische Reihe, welche von einer Nulle anfängt, eine geometrische Reihe, die von 1 anfängt, geschrieben wird, so sind die Glieder der ersten die Logarithmen der übereinstimmenden Glieder der letzten, wie in diesen zwey Reihen:

$$0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7$$
$$1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128$$

I. FOLGERUNG.

237. Da man jede geometrische Reihe, wo a oder das erste Glied $= 1$ ist, auf folgende Art ausdrücken kann $q^0, q^1, q^2, q^3, q^4, q^5, q^6, q^7$ (§. 220), so folget, daſs man die Exponenten einer geometrischen Reihe, als Logarithmen der Glieder der erwähnten Reihe, betrachten könne, das ist, die Exponenten sind die Logarithmen ihrer Würden.

II. FOLGERUNG.

238. Da jede Multiplication der Würden durch die Addition der Exponenten geschieht, und die Summe der Exponenten dem Exponenten des Productes gleich ist, die Exponenten aber Logarithmen sind; so folget, daſs, *wenn man die Logarithmen zweyer Factoren addiret, dieſs der Logarithmus des Productes ist.* So sind in der obigen Reihe die Logarithmen von 4 und 32 die Zahlen 2 und 5, und deren Summe 7 ist der Logarithmus des Productes 128. Und da die Division der Würden durch die Subtraction der Exponenten geschieht, wo der Unterschied dem Exponenten des Quotienten gleich ist, so folget auch, daſs, *wenn man den Logarithmus des Divisors von dem Logarithmus des Dividendus subtrahiret, dieſs der Logarithmus des Quotienten ist.* So erhält man in der nähmlichen Reihe aus 128, dividiret mit 4, oder aus dem Unterschiede der Logarithmen 7—2, den Logarithmus 5, mit welchem der Quotient 32 übereinstimmet.

III. FOLGERUNG.

239. Der Exponent der Gröſse, wenn er mit dem Exponenten der gesuchten Würde multipliciret wird, gibt den Exponenten der Würde (§. 49.); also gibt auch der Logarithmus der gegebenen Zahl, wenn er mit dem Exponenten der Würde multipliciret wird, den Logarithmus der Würde. Die dritte Würde von 4 erhält man, wenn man den Logarithmus derselben 2 mit 3 multipliciret; das Product 6 ist der Logarithmus der dritten Würde 64. Und wenn man den Exponenten jeder Würde mit dem gegebenen Exponenten der Wurzel dividiret, so hat man die gesuchte Wurzel (§. 60.); also gibt auch der Logarithmus der Würde, wenn er mit dem Exponenten der Wurzel dividiret wird, den Logarithmus der gesuchten Wurzel. Aus 64 wird die Wurzel der dritten Würde ausgezogen, wenn man den Logarithmus derselben, 6 mit 3 dividiret; der

der Quotient 2 ist der Logarithmus der Wurzel 4. Es wird also bey Logarithmen jede Multiplication in eine Addition, jede Division in eine Subtraction, jede Erhöhung zu Würden in eine Multiplication, und jede Ausziehung der Wurzel in eine Division verändert. Daher verschaffen die Logarithmen ungemein viel Nutzen und Bequemlichkeit.

ANMERKUNG.

240. Die Logarithmen (λογαριθμους) hat zuerst *Neper* in Schottland 1614 entdecket; denn als er die Eigenschaften der Wurzelausziehung mit vielem Scharfsinne untersuchte, so gelangte er dadurch zu Kenntniſs der Beschaffenheit der Logarithmen. Er theilte hierauf seine Beobachtungen dem *Briggius* mit, und beyde arbeiteten nun mit einander, die Sache zur Vollständigkeit zu bringen, besonders aber war ihre Absicht dabey, für jede Zahl einen angemeſsenen Logarithmus, oder Exponenten zu finden. Hierzu war es nöthig, die natürlichen Zahlen als eine geometrische Reihe zu betrachten, und die übereinstimmenden Exponenten, oder Logarithmen in arithmetischer Reihe zu bestimmen. Sie nahmen also anfangs die geometrische Reihe des Quotienten 10, und gaben den Gliedern derselben die natürlichen Zahlen in arithmetischer Reihe nach den bekannten Regeln, als Exponenten zur Seite; und so ward der Logarithmus der Einheit 0, des Zehners 1, des Hunderters 2, des Tausenders 3 u. s. f. z. B. auf folgende Art:

0	1	2	3	4	5	
1	10	100	1000	10000	100000	u. s. f.

Als sie nun diese Logarithmen festgesetzet hatten, war es nöthig, für die Zwischenzahlen der geometrischen Reihe die im arithmetischen Verhältniſse stehenden Zwischenzahlen zu finden, welche zehntheilige Brüche seyn muſsten, weil zwischen 0 und 1, dann zwischen 1 und 2 u. s. f. keine ganze Zahl vorkommt. Zwischen 1 und 10 findet man im geometrischen Verhältniſs $= \sqrt{10}$, weil $1 : x = x : 10$;

also ist $10 = x^2$; also $\sqrt{10} = x$, wird nun die Wurzel ausgezogen, so erhält man durch die Annäherung 3 . 162277, deſsen mittleres im arithmetischen Verhältniſse stehendes Glied mit $\frac{1}{2}$ übereinstimmet, weil $0 . x = x . 1$; also ist $1 = 2x$ und $\frac{1}{2} = x$; nun aber gibt $\frac{1}{2}$ in zehntheiligen Brüchen 0 . 5000000; also ist dieser Bruch der Logarithmus von 3 mit beygesetzten zehntheiligen Zahlen 162277.

Ferner suchten sie zwischen dieser gefundenen Zahl 3 . 162277 und 10 die im geometrischen Verhältniſs stehende Zahl; und für den Logarithmus derselben suchten sie wieder zwischen 0 . 5000000 und 1 die im arithmetischen Verhältniſs stehende Zahl. Dieſs setzten sie so lange fort, bis sie nach der 24sten Wurzelausziehung die im geometrischen Verhältniſs stehende Zahl 9 . 0000000 und deren Logarithmus 0 . 954242 gefunden hatten. Auf diese Art war also der Logarithmus der Zahl 9 bestimmet; eben so wurden die Logarithmen der Zahlen 2, 5 und 7 gesucht, und die folgenden gefunden:

2	0 . 301030
5	0 . 698970
7	0 . 845098
9	0 . 954242

Für die übrigen Zahlen, die nur aus einer Ziffer bestehen, werden die Logarithmen, nach den vorhergehenden Folgerungen, gebildet. Z. B. von 9 ist die Wurzel 3; wird nun der Logarithmus von 9 mit 2 dividiret, so hat man von der Wurzel 3 (§. 60.) den Logarithmus 0 . 477121. Von 2 ist das Quadrat 4; nimmt man deſsen Logarithmus zwey Mahl, oder addiret ihn zu ihm selbst (§. 49.), so hat man von 4 den Logarithmus 0 . 602060. Da 2×3 die Zahl 6 gibt, so erhält man den Logarithmus derselben, wenn man die Logarithmen von 2 und 3 addiret (§. 47.) = 0 . 778151. Und den Logarithmus von 8 gibt die Summe der Logarithmen von den Zahlen 2 und 4 = 903098. Von den Zahlen 11, 13 u. s. f. sind die Logarithmen wieder zu suchen;

hingegen die Logarithmen von den Zahlen 1°, 14 u. s. f. erhält man durch die Addition. Alle diese L arithmen hat zuerst *Briggius* in Tafeln gesammelt, und durch den Druck bekannt gemacht. *Vlacq* hat sie nachmahls vermehret. Sie sind insgemein unter dem Nahmen *Canon Logarithmorum* bekannt.

I. FOLGERUNG.

241. Aus dem, was bisher gesagt worden ist, folget, dafs jeder Logarithmus aus einem zehntheiligen Bruche bestehet, und zwar von 1 bis 10 ohne ein vorhergehendes Ganzes; von 10 bis 100 mit einer vor dem Bruche gehenden Einheit; von 100 bis 1000 mit zwey Einheiten vor dem Bruche u. s. w. Überhaupt ist immer die Anzahl der Ziffern in der gegebenen Zahl um eine Einheit gröfser, als das Ganze in den Logarithmen. Besteht die gegebene Zahl aus drey Ziffern, z. B. 528, so sind in dem Logarithmus 2 Ganze enthalten. Besteht die gegebene Zahl aus fünf Ziffern, z. B. 34467, so müfsen in dem Logarithmus 4 Ganze seyn. Daher nennet man die vor den zehntheiligen Zahlen stehenden Ganzen die *Kennziffern*, weil man aus denselben erkennet, aus wie viel Ziffern die übereinstimmende Zahl bestehe. Diefs erhellet aus der in der vorhergehenden Anmerkung dargestellten Reihe.

II. FOLGERUNG.

242. Da von 10 der Logarithmus 1 . 000000 ist, und die Multiplication zweyer Zahlen durch die Addition der Logarithmen geschicht, so ist es offenbar, dafs, wenn der eine Factor 10 ist, der Logarithmus des Productes dem Logarithmus des andern Factors gleich seyn mufs, mit dem einzigen Unterschiede, dafs er in der Kennziffer um eine Einheit vermehret wird. So ist der nähmliche Logarithmus von 2 und 20 und 200 und 2000; nur ist die Kennziffer in dem ersten Falle $=0$, in dem zweyten $=1$, in dem dritten $=2$, in dem vierten $=3$; hingegen sind die

zehntheiligen Zahlen immer dieselben 301030. So ist auch der nähmliche Logarithmus von den Zahlen 34 und 340 oder von den Zahlen 346 und 3460, oder von den Zahlen 347 und 3470; ferner von 346 und 34600 oder 346000, dey denen immer nur die Kennziffer verschieden ist, welche um eine Einheit kleiner ist, als die Anzahl der Ziffern, derer Logarithmus gesucht wird.

III. FOLGERUNG.

243. Hieraus folget die Methode, nach welcher man jeden Logarithmus von einer höheren Gröſse, als in den Tafeln vorkommt, oder nach welcher man zu einem gegebenen Logarithmus einer gröſseren Kennziffer, als in den Tafeln vorkommt, die übereinstimmende Zahl finden kann. Denn da der Logarithmus, auſser der Kennziffer, nicht verändert wird, wenn man die Zahl entweder um eine Nulle vermehret oder vermindert, so kann man durch die bloſse Regel der Proportionen die Zwischenlogarithmen, oder die übereinstimmenden Zahlen finden. Nehmen wir an, daſs in der Tafel die Logarithmen von 1 bis 1000 enthalten seyn, und daſs man den Logarithmus der Zahl 6771 oder 6775 zu suchen habe. Da der Logarithmus der Zahlen 6770 und 6780 der nähmliche ist, als der Zahlen 677 und 678, so erhellet, daſs, gleich wie zwischen 6770 und 6780 die Zwischenzahlen 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79 sind, eben so auch zwischen den zwey Logarithmen der Zahlen 6770 und 6780 andere Zwischenlogarithmen enthalten seyn müſsen. Man muſs daher den Unterschied der Logarithmen von den Zahlen 677 und 678 nehmen, und diesen Unterschied in 10 Theile theilen; dann ist jeder der nachfolgenden Logarithmen um einen solchen Theil gröſser, als der vorhergehende. Auf solche Art erhält man also die Logarithmen der Zwischenzahlen; denn 10 verhält sich zum ganzen Unterschiede, wie 1 zum Unterschiede eines Theiles; wie 2 zum Unterschiede zweyer Theile u. s. f. So ist der Logarithmus von 677 oder 6770, mit Hinweglaſsung der

Kennziffer 830588. Der Logarithmus von 678 oder 6780 ist 831229; der Unterschied ist 641, dieser mit 10 dividiret, gibt 64, welche Zahl zu jedem der vorhergehenden Logarithmen addiret werden muſs. Der Logarithmus der Zahl 6771 ist also 3 . 830652 u. s. f. und der Logarithmus von 6775 ist 3 . 830909. Hierauf gründet sich die Auflösung und der Beweis der folgenden Aufgaben. Es verstehet sich aber von selbst, daſs die Tafeln der Logarithmen von 1 bis 10000 bey der Hand seyn werden.

I. AUFGABE.

244. Die Zahl des gegebenen Logarithmus finden, wovon die Kennziffer 0. 1. 2. oder 3 ist.

AUFLÖSUNG.

Ist die Kennziffer 0 oder 1, so suchet man den gegebenen Logarithmus in den Tafeln von 1 bis 99; die in der ersten Columne stehende und mit demselben übereinstimmende Zahl ist die gesuchte Zahl.

Ist die Kennziffer 2 oder 3, so suchet man von 100 bis 9999; die in der ersten Columne mit dem Logarithmus übereinstimmende Zahl ist die gesuchte Zahl.

Z. B. Zu dem Log. 1 . 716003 gehört 52.
zu dem Log. 2 . 424882 gehört 266.
zu dem Log. 3 . 725585 gehört 5316.
zu dem Log. 3 . 858958 gehört 7227.

Ist der gesuchte Logarithmus in der Tafel nicht enthalten, so nimmt man den zunächst kleineren.

Z. B. Zu dem Log.	0.759668 geh. am nächsten	5.
- - - - - - - -	0.991669 - - - - - - - -	9.
- - - - - - - -	1.060698 - - - - - - - -	11.
- - - - - - - -	1.294466 - - - - - - - -	19.
- - - - - - - -	2.730540 - - - - - - - -	537.
- - - - - - - -	2.255996 - - - - - - - -	180.

II. AUFGABE.

245. Eine Zahl finden, welche mit dem Logarithmus einer gröſseren Kennziffer, als in den Tafeln vorkommt, übereinstimmend ist.

AUFLÖSUNG.

I. Man suchet unter der gröſsten Kennziffer, die in den Tafeln vorkommt, den zunächst kleineren Logarithmus, subtrahiret diesen von dem gegebenen Logarithmus, und merket den Unterschied an.

II. Man suchet den Unterschied zwischen eben diesem zunächst kleineren und dem gröſseren Logarithmus.

III. Nun setzet man diese Proportion: wie sich dieser Unterschied der tabellarischen Logarithmen zu meinem vorigen Unterschiede verhält, so verhält sich 10; 100, 1000 zur vierten Zahl, indem man nähmlich so viel Nullen hinzu setzet, um wie viel Einheiten die Kennziffer des gegebenen Logarithmus mehr enthält, als die Ziffern der mit dem kleineren Logarithmus übereinstimmenden Zahl enthalten; das ist, wenn die Kennziffer 4 ist, so nimmt man 10; ist sie 5, so nimmt man 100; ist sie 6, so nimmt man 1000 u. s. f.

IV. Die gefundene vierte Zahl setzet man denjenigen Ziffern bey, welche mit dem zunächst kleineren Logarithmus übereinstimmen.

Es sey zu dem Logarithmus 4.530632 die übereinstimmende Zahl zu suchen.

I. Der zunächst kleinere tabellarische Logarithmus unter der Kennziffer 3, ist 530584, welcher, von dem gegebenen subtrahiret, den Unterschied 48 gibt.

II. Der Unterschied in den Tafeln ist 128.

III. Man machet die Proportion 128 : 48 = 10 : 3.

IV. Zu der mit dem kleineren Logarithmus übereinstimmenden Zahl 3393 setzet man die neu gefundene 3; und die mit dem gegebenen Logarithmus übereinstimmende Zahl ist 33933.

Es sey zu dem Logarithmus 6.753473 die übereinstimmende Zahl zu suchen.

I. Der zunächst kleinere Logarithmus in den Tafeln unter der Kennziffer 3, ist 753429; dieser, von dem gegebenen subtrahiret, gibt den Unterschied 44.

II. Der tabellarische Unterschied ist 77.

III. 77 : 44 = 1000 : 571.

IV. Zu der mit dem kleineren Logarithmus übereinstimmenden Zahl 5668 setzet man die gefundene, und dann ist die mit dem gegebenen Logarithmus übereinstimmende Zahl 5668571.

III. AUFGABE.

246. Den mit der gegebenen Zahl übereinstimmenden Logarithmus finden.

AUFLÖSUNG.

Ist die Kennziffer 0 . 1 . 2 . 3 . so findet man den Logarithmus in den Tafeln ausgedrückt, wie bey der ersten Aufgabe umgekehrt von den Logarithmen gesagt worden ist, z. B.

5 hat den Logarithmus 0.698970
19 . . . . 1.278754
537 . . . . 2.729974.

Ist die Kennziffer 4.5.6. oder noch gröſser, so geschieht die Auflösung, gemäſs der III. Folgerung und der II. Aufgabe, nach folgenden Regeln.

I. Man suchet den Logarithmus, der mit den ersten vier Ziffern übereinstimmet, und schneidet indeſs die übrigen ab; dann subtrahiret man denselben von dem zunächst gröſseren tabellarischen, und merket den Unterschied an.

II. Nun nimmt man die abgeschnittenen Ziffern, und nimmt zugleich 1 mit so viel Nullen, als Ziffern abgeschnitten worden sind; nähmlich: ist 1 abgeschnitten, so nimmt man 10; sind 2 abgeschnitten, so nimmt man 100; sind 3, also 1000 u. s. f.

III. Man setzet die Proportion: wie sich 10, oder 100, oder 1000 zu den abgeschnittenen Ziffern verhält, so verhält sich der vorher gefundene Unterschied zu dem neuen Unterschiede.

IV. Diesen neuen Unterschied addiret man zu dem kleineren Logarithmus, und dann ist die Summe, mit Beysetzung der gehörigen Kennziffer, der gesuchte Logarithmus.

Es sey der Logarithmus der Zahl 45647 zu suchen.

I. Der Logarithmus der Zahl 4564 ist 659346; der Unterschied von dem zunächst gröſseren ist 97.

II. Die abgeschnittene Ziffer ist 7; also muſs für die Proportion die Zahl 10 genommen werden.

III. 10 : 7 = 95 : 66.

IV. Addiret man 66 zu dem kleineren Logarithmus 659346, so hat man den gesuchten Logarithmus 4 . 659412.

Es sey der Logarithmus der Zahl 7853646 zu suchen.

I. Der Logarithmus der Zahl 7853 ist 895036; der Unterschied von dem gröſseren ist 55.

II. Die abgeschnittenen Ziffern sind drey, 646; also muſs man für die Proportion 1000 nehmen.

III. 1000 : 646 = 55 : 35.

IV. 35, addiret zu 895036, gibt den gesuchten Logarithmus 6 . 895071.

IV. AUFGABE.

247. Zehntheilige Brüche finden, die einer Zahl beyzusetzen sind, mit welcher ein in den Tafeln nicht enthaltener Logarithmus übereinstimmet.

AUFLÖSUNG.

Ist die Kennziffer 0 . 1 . oder 2 . so suchet man den gegebenen oder zunächst kleineren Logarithmus unter der Kennziffer 3, das ist, unter den Zahlen von vier Ziffern; und von diesen vier übereinstimmenden Ziffern, wenn die gegebene Kennziffer =0 ist, wird die erste Ziffer ein Ganzes seyn, die folgenden drey aber sind zehntheilige Brüche; ist die Kennziffer =1, so sind die ersten zwey Ziffern Ganze, und die folgenden zwey sind zehntheilige Brüche; ist die Kennziffer =2, so sind die ersten drey Ziffern Ganze, und die vierte ist ein zehntheiliger Bruch. Z. B.

Mit dem Log. 0 . 871281 stimmet überein 7 . 435
. . . . . . 1 . 538448 . . . . 34 . 55
. . . . . . 2 . 790567 . . . . . . 617 . 4

Ist die Kennziffer 3 . 4 . oder auch eine grössere, so suchet man die zehntheiligen Brüche nach der bey der II. Aufgabe vorgetragenen Proportion, indem man für die ersten Glieder die Unterschiede der Logarithmen, und für das dritte Glied eine Einheit mit so viel Nullen nimmt, als zehntheilige Brüche verlanget werden. Z. B.

Man gibt den Log. 3 . 525783, mit welchem die Zahl 3355 übereinstimmet.

Man suchet zwey zehntheilige Brüche.

I. Der zunächst kleinere Log. ist 525693; der Unterschied von dem gegebenen ist 90.

II. Der tabellarische Unterschied ist 129.

III. 129 : 90 = 100 : 69.

Also ist die übereinstimmende Zahl 3355 . 69.

V. AUFGABE.

248. Zu einer gemischten Zahl (einer ganzen mit zehntheiligen Brüchen) den gehörigen Logarithmus finden.

AUFLÖSUNG.

Man betrachtet die Zahl als ein Ganzes, suchet den mit derselben übereinstimmenden Logarithmus, gemäſs der III. Aufgabe, und setzet diesem die gehörige Kennziffer vor.

VI. AUFGABE.

249. Den Logarithmus eines Bruches finden.

AUFLÖSUNG.

Da jeder Bruch eine Division ist, bey welcher der Zähler den Dividendus, und der Nenner den Divisor macht, bey der Division aber die Logarithmen subtrahiret werden (§. 238.), so erhält man den Logarithmus eines Bruches, wenn man von dem Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahiret; der Unterschied ist der Logarithmus des Bruches, und muſs nothwendig das verneinende Zeichen haben. So erhält man den Logarithmus von $\frac{3}{8}$, wenn man den Logarithmus der Zahl $8 = 0 . 903090$ von dem Logarithmus der Zahl $3 = 0 . 477121$ subtrahiret; der Unterschied $= -0 . 574031$ ist der gesuchte Logarithmus.

I. FOLGERUNG.

250. Ist der Zähler eine Einheit, deren Logarithmus bloſse Nullen sind, so wird dem Logarithmus des Nenners nur allein das Zeichen — vorgesetzet. Z. B. der Logarithmus von $\frac{1}{12}$ ist $- 1 . 079181$. Daher wird auch die mit jedem verneinenden Logarithmus übereinstimmende Zahl in Gestalt eines Nenners ausgedrückt, deſsen Zähler eine Einheit ist. Z. B. mit dem Logarithmus $- 1 . 875061$ stimmet $\frac{1}{75}$ überein.

II. FOLGERUNG.

251. Wird eine gemischte Zahl gegeben, so reduciret man sie zu einem Bruche, und subtrahiret den Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers; der Unterschied ist der Logarithmus des gegebenen Bruches. Z. B. $8\frac{5}{6} = \frac{53}{6}$ hat den Logarithmus $(1 . 724276 - 0 . 778151) = 0 . 946125$.

VII. AUFGABE.

252. Durch Hilfe der Logarithmen multipliciren, dividiren, zu Würden erheben, Wurzeln ausziehen.

AUFLÖSUNG.

Da die Logarithmen Exponenten sind, so hat man die Regeln der Exponenten zu beobachten (§. 44.). Bey der Multiplication werden sie addiret, bey der Division subtrahiret; bey der Erhebung zu Würden werden sie mit der Zahl der verlangten Würde multipliciret; bey der Wurzelausziehung hingegen mit der Zahl der verlangten Wurzel dividiret.

I. Man multipliciret 324 mit 26

Log. von	324 = 2 . 510545
+ Log. von	26 = 1 . 414973
	3 . 925518

Das übereinstimmende Product ist 8424.

II. Man dividiret 8424 mit 26

Log. von	8424 = 3 . 925518
— Log. von	26 = 1 . 414973
	2 . 510545

Der übereinstimmende Quotient ist 324.

III. Man suchet die dritte Würde von 12

Log. von	12 = 1 . 079181
multipliciret mit	3
	3 . 237543

Der übereinstimmende Kubus ist 1728.

IV. Man ziehet die Kubikwurzel aus 2744

$$\begin{array}{ll} \text{Log. von} & 2744 = 3 \cdot 438384 \\ \text{dividiret mit} & \underline{\quad 3 \qquad\qquad} \\ & \quad 1 \cdot 146128 \end{array}$$

Die übereinstimmende Wurzel ist 14.

ANMERKUNG.

253. Das Besondere von den Logarithmen der Sinuse und der Tangenten wird in der Trigonometrie erkläret werden.

I
t
a
E
d
z
te

I.

II.

III

VERZEICHNISS
DER
HAUPTSTÜCKE.

IN DER ARITHMETIK.

IN DER ALGEBRA.

DRUCKFEHLER UND VERBESSERUNGEN.

Seite	Zeile	statt	lies
108	11	$2a$	$2b$
116	27	32	-32
144	11	4543	4643
145	16	$84 \cdot 53$	$86 \cdot 53$
198	31	$10x = 600xx$	$10x = 600 - x^2$
202	14	$49 + = 58$	$49 + 9 = 58.$

Fig. 1.

Fig. 2.

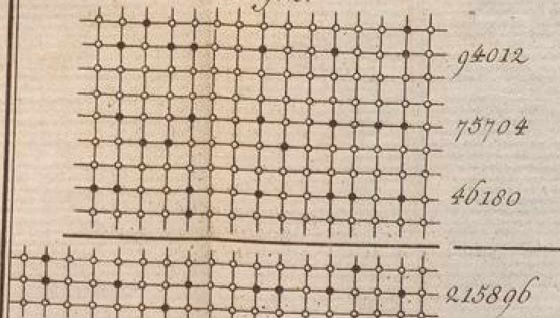


Fig. 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Fig. 4.

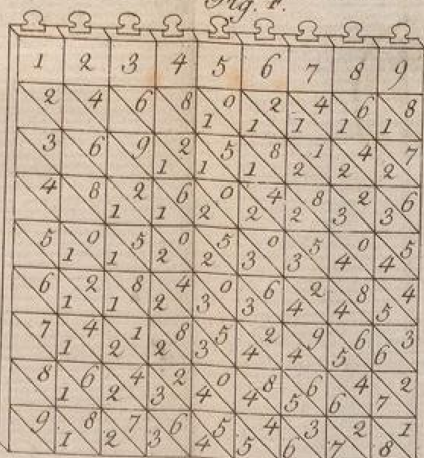


Fig. 5.

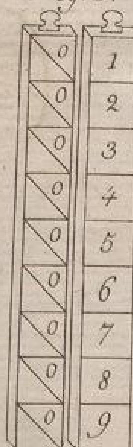
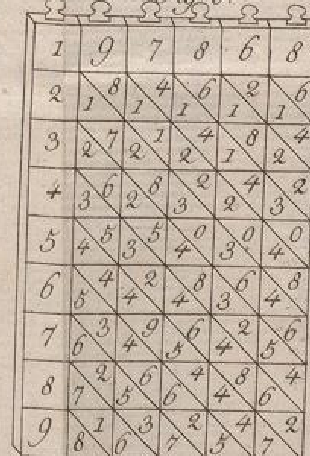


Fig. 6.



Metzburgs Mathem. I. Theil.